



ENSEÑANZA DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO-MÉTRICO DESDE EL MODELO MKT Y LA REALIDAD AUMENTADA PARA MAESTROS EN FORMACIÓN EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS.

Autor: Santhier Stiwár Mosquera Ampudia

Filiación: Universidad Tecnológica del Chocó “Diego Luis Córdoba”

Colombia

Correo electrónico: sanmoa18@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2810-8650>

DOI: <https://doi.org/10.56219/se.v26i1.5483>

p.p. 717-730

RESUMEN

El artículo realiza una revisión teórica sistemática que integra los referentes conceptuales del pensamiento geométrico-métrico, el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), la teoría de los niveles de razonamiento de Van Hiele y el potencial de la Realidad Aumentada (RA) como mediación didáctica en la enseñanza de la geometría universitaria. Se analiza la persistencia de brechas entre las metas formativas de la educación geométrica y las prácticas escolares tradicionales, evidenciada en evaluaciones internacionales, regionales y nacionales, lo que justifica estudiar el pensamiento geométrico-métrico como constructo multidimensional articulado a procesos de visualización, modelación, representación y argumentación. La revisión documental permite identificar aportes relevantes sobre el conocimiento especializado docente, destacando que los dominios del MKT, especialmente el SCK, KCS y HCK, resultan críticos para comprender cómo los futuros maestros interpretan, explican y movilizan definiciones, propiedades y relaciones geométricas. Asimismo, se sistematizan hallazgos recientes que demuestran que la RA favorece la inteligencia espacial, la exploración activa de objetos tridimensionales y la fluidez representacional, configurándose como mediación coherente con las exigencias cognitivas del pensamiento geométrico-métrico. A partir del análisis comparativo, se evidencia una escasez de estudios que articulen de manera integrada estos tres ejes: pensamiento geométrico-métrico, conocimiento especializado docente y tecnologías inmersivas en la formación inicial de profesores de matemáticas, lo que delimita la pertinencia y contribución del presente artículo como ejercicio de integración teórico-analítica.

CITA EN APA:

Mosquera Ampudia, S. S. (2026). Enseñanza del pensamiento geométrico-métrico desde el modelo MKT y la realidad aumentada para maestros en formación en el área de matemáticas. *Sinopsis Educativa: Revista Venezolana de Investigación*, 26(1), 717-730. Recuperado de: https://revistas.upel.edu.ve/index.php/sinopsis_educativa/issue/archive



PALABRAS CLAVE: pensamiento geométrico-métrico, MKT, niveles de Van Hiele, realidad aumentada, formación docente, visualización espacial.

TEACHING GEOMETRIC-METRIC THINKING THROUGH THE MKT MODEL AND AUGMENTED REALITY FOR PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS

ABSTRACT

The article presents a systematic theoretical review that integrates the conceptual foundations of geometric-metric thinking, the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) framework, the Van Hiele theory of levels of geometric reasoning, and the potential of Augmented Reality (AR) as a didactic mediation in university-level geometry teaching. It analyzes the persistence of gaps between the formative goals of geometric education and traditional school practices, as evidenced in international, regional, and national assessments, which justifies examining geometric-metric thinking as a multidimensional construct articulated through processes of visualization, modeling, representation, and argumentation. The documentary review identifies relevant contributions regarding specialized teacher knowledge, highlighting that the MKT domains—particularly SCK, KCS, and HCK—are critical for understanding how future teachers interpret, explain, and mobilize geometric definitions, properties, and relationships. Likewise, recent findings are systematized, demonstrating that AR enhances spatial intelligence, supports active exploration of three-dimensional objects, and promotes representational fluency, thus acting as a mediation aligned with the cognitive demands of geometric-metric thinking. The comparative analysis reveals a scarcity of studies that integrate these three axes: geometric-metric thinking, specialized teacher knowledge, and immersive technologies within the initial training of mathematics teachers, which underscores the relevance and contribution of the present article as a theoretically and analytically integrated endeavor.

KEYWORDS: geometric-metric thinking, MKT, Van Hiele Levels, augmented reality, teacher education, spatial visualization.

ENSEIGNEMENT DE LA PENSÉE GÉOMÉTRIQUE-MÉTRIQUE MÉDIÉ PAR LE MODÈLE MKT ET LA RÉALITÉ AUGMENTÉE DANS LA FORMATION DES ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES

RÉSUMÉ

L'article réalise une revue théorique systématique qui intègre les référents conceptuels de la pensée géométrique-métrique, le modèle *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), la théorie des niveaux de raisonnement de Van Hiele et le potentiel de la Réalité Augmentée (RA) en tant que médiation didactique dans l'enseignement de la géométrie universitaire. Il analyse la persistance des écarts entre les objectifs formatifs de l'éducation géométrique et les pratiques scolaires traditionnelles, mise en évidence par des évaluations internationales, régionales et nationales, ce qui justifie l'étude de la pensée géométrique-métrique comme un construit multidimensionnel articulé à des processus de visualisation, de modélisation, de représentation et d'argumentation. La revue documentaire permet d'identifier des apports pertinents concernant le savoir spécialisé

des enseignants, en soulignant que les domaines du MKT, en particulier le SCK, le KCS et le HCK, se révèlent essentiels pour comprendre comment les futurs enseignants interprètent, expliquent et mobilisent les définitions, les propriétés et les relations géométriques. Par ailleurs, les résultats récents systématisés démontrent que la RA favorise l'intelligence spatiale, l'exploration active d'objets tridimensionnels et la fluidité représentationnelle, se configurant comme une médiation cohérente avec les exigences cognitives de la pensée géométrique-métrique. À partir de l'analyse comparative, il est mis en évidence une rareté d'études articulant de manière intégrée ces trois axes : la pensée géométrique-métrique, le savoir spécialisé des enseignants et les technologies immersives dans la formation initiale des professeurs de mathématiques, ce qui délimite la pertinence et la contribution du présent article en tant qu'exercice d'intégration théorico-analytique.

MOTS-CLÉS : pensée géométrique-métrique, MKT, niveaux de Van Hiele, réalité augmentée, formation des enseignants, visualisation spatiale.

ENSINO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO-MÉTRICO A PARTIR DO MODELO MKT E DA REALIDADE AUMENTADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM FORMAÇÃO

RESUMO

O artigo realiza uma revisão teórica sistemática que integra os referenciais conceituais do pensamento geométrico-métrico, o modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), a teoria dos níveis de raciocínio de Van Hiele e o potencial da Realidade Aumentada (RA) como mediação didática no ensino da geometria universitária. Analisa-se a persistência de lacunas entre as metas formativas da educação geométrica e as práticas escolares tradicionais, evidenciada em avaliações internacionais, regionais e nacionais, o que justifica estudar o pensamento geométrico-métrico como construto multidimensional articulado a processos de visualização, modelagem, representação e argumentação. A revisão documental permite identificar contribuições relevantes sobre o conhecimento especializado docente, destacando que os domínios do MKT, especialmente o SCK, KCS e HCK, mostram-se críticos para compreender como os futuros professores interpretam, explicam e mobilizam definições, propriedades e relações geométricas. Da mesma forma, sistematizam-se achados recentes que demonstram que a RA favorece a inteligência espacial, a exploração ativa de objetos tridimensionais e a fluidez representacional, configurando-se como mediação coerente com as exigências cognitivas do pensamento geométrico-métrico. A partir da análise comparativa, evidencia-se a escassez de estudos que articulem de maneira integrada estes três eixos: pensamento geométrico-métrico, conhecimento especializado docente e tecnologias imersivas na formação inicial de professores de matemática, o que delimita a pertinência e contribuição do presente artigo como exercício de integração teórico-analítica.

PALAVRAS-CHAVE: pensamento geométrico-métrico, MKT, níveis de Van Hiele, realidade aumentada, formação de professores, visualização espacial.

INTRODUCCIÓN

La geometría constituye mucho más que un conjunto de fórmulas, definiciones y teoremas: representa un lenguaje universal que permite describir, interpretar y transformar el espacio en el que se desarrolla la vida humana. Su valor no radica

únicamente en el dominio de técnicas o procedimientos, sino en la capacidad que ofrece para razonar espacialmente, modelar situaciones reales y comprender estructuras subyacentes en fenómenos naturales y construcciones humanas. En palabras de Freudenthal (1973) argumenta que:

La matemática, y particularmente la geometría, debe concebirse como una actividad humana mediante la cual el individuo organiza su experiencia espacial, la representa y la transforma a través de estructuras que construye y reconstruye en interacción con su entorno” (p. 5).

A pesar de esta concepción, la enseñanza de la geometría enfrenta desafíos persistentes en los diferentes niveles educativos. Con frecuencia, la práctica escolar se reduce a la transmisión de procedimientos algorítmicos descontextualizados, sin ofrecer oportunidades para explorar, visualizar y razonar de manera significativa. Esta paradoja pedagógica ha sido identificada por Villanueva y Navarro (2017), quienes evidencian:

Una brecha entre los objetivos formativos de la educación geométrica —centrados en el desarrollo del razonamiento y la visualización espacial— y las prácticas reales en las aulas, caracterizadas por la enseñanza memorística de fórmulas y propiedades, desconectadas de contextos significativos” (p. 97).

En el ámbito internacional, evaluaciones comparativas como el “*Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias*” (TIMSS). Muestran que los niveles de desempeño en geometría y medición son consistentemente inferiores en comparación con otros dominios matemáticos. De acuerdo con la “*Asociación Internacional para la Evaluación del Logro Educativo*” (IEA, 2020), menos del 35 % de los estudiantes alcanzan niveles de razonamiento geométrico que involucran análisis, deducción informal o resolución de problemas complejos. En estudios recientes Johnson y Larsen (2021), confirman que estas dificultades persisten incluso en contextos donde se han incorporado recursos digitales y estrategias basadas en modelización y visualización dinámica.

En Latinoamérica, los informes de organismos regionales y las bases de datos del “*Estudio Regional Comparativo y Explicativo*” (ERCE), reflejan brechas profundas en el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico, asociadas

tanto a inequidades estructurales como a prácticas pedagógicas tradicionales. En Colombia, los resultados de las Pruebas SABER PRO (2022) para licenciaturas en matemáticas, ingeniería y afines evidencian desempeños particularmente bajos en el componente geométrico-métrico, situación que contrasta con las metas establecidas en el Plan Nacional Decenal de Educación (PNDE 2016–2026) y con el Objetivo de Desarrollo Sostenible 4, orientado a promover una educación inclusiva e innovadora.

En este escenario, la educación superior, y especialmente la formación inicial de docentes de matemáticas, desempeña un papel clave. El pensamiento geométrico-métrico concebido como la capacidad de visualizar, representar, modelar y razonar sobre formas, magnitudes y estructuras (MEN, 2006). Constituye un eje fundamental para el desarrollo de habilidades analíticas y críticas. Investigaciones recientes como las de Sinclair y Bruce (2021), subrayan que fortalecer este pensamiento requiere enfoques didácticos que integren la visualización, el uso de múltiples representaciones y la argumentación.

En este contexto, las tecnologías educativas emergentes, particularmente la Realidad Aumentada (RA), adquieren un valor estratégico. La RA crea entornos interactivos que articulan el espacio físico y el virtual, expandiendo las posibilidades de exploración geométrica tridimensional y favoreciendo procesos de razonamiento y metacognición (Hernández et al., 2019). No obstante, su integración en la educación superior exige un soporte teórico consistente que oriente las decisiones didácticas, el diseño curricular y la evaluación.

En este sentido, marcos teóricos como el Mathematics Knowledge for Teaching (MKT) de Ball et al., (2008), la teoría de niveles de razonamiento de Van Hiele (1958; actualizaciones en Usiskin, 2018; Pittalis y Christou, 2020), permiten analizar cómo se construye, transforma y enseña el saber geométrico.

La articulación de estos marcos con la potencialidad de la RA posibilita un constructo

teórico sólido para repensar la enseñanza del pensamiento geométrico-métrico en la formación inicial docente.

REFERENTES TEÓRICOS

El desarrollo teórico de este artículo se sustenta en una articulación conceptual que integra el pensamiento geométrico-métrico, el modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), la teoría de los niveles de razonamiento de Van Hiele y los aportes de la Realidad Aumentada (RA) como mediación didáctica innovadora en la enseñanza de la geometría universitaria. Este desarrollo teórico permite comprender la geometría no solo como un conjunto de contenidos formales, sino como un sistema complejo de prácticas cognitivas, representacionales y argumentativas que se construyen progresivamente en interacción con el contexto y la experiencia didáctica. Desde esta perspectiva, se asume que el fortalecimiento del pensamiento geométrico-métrico en la formación de docentes requiere tanto del dominio conceptual especializado como del uso estratégico de recursos tecnológicos que potencien la visualización, la modelación y la comprensión significativa del espacio, situando a la RA como un puente entre lo concreto y lo abstracto en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Pensamiento geométrico – métrico en educación matemática

El pensamiento geométrico-métrico se reconoce como un eje fundamental en la educación matemática, por cuanto posibilita comprender, representar, analizar, transformar el espacio físico y conceptual. Su fundamento clásico se encuentra en Freudenthal (1973), para quien la geometría constituye una actividad humana orientada a organizar la experiencia espacial. El autor afirma que:

El pensamiento geométrico implica capturar el espacio en el cual los niños [jóvenes y adultos] viven, respiran y se mueven; un espacio que deben aprender a conocer, explorar y conquistar

con el fin de vivir, respirar y moverse mejor en este. (Freudenthal, 1973, p. 6).

Este enfoque se complementa con investigaciones actuales que destacan la importancia del razonamiento espacial, la visualización dinámica y la argumentación como ejes centrales para el desarrollo del pensamiento geométrico. (Jones et al; 2020), Clements y Sarama, 2021). Las tendencias contemporáneas enfatizan que la geometría no se limita a la memorización de propiedades, sino que integra actividades cognitivas, perceptuales y métricas que contribuyen a la comprensión profunda y aplicada del espacio.

Actividades propias del pensamiento geométrico-métrico

Camargo (2021) propone que la didáctica de la geometría se fundamenta en la interacción entre distintos elementos que configuran el proceso educativo. En el centro se sitúa la Geometría, articulada mediante el modelo EAGeo (Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría), que actúa como un eje de conexión entre enseñanza y aprendizaje en un contexto social y cultural determinado. Esta visión reconoce que la enseñanza geométrica es un fenómeno complejo, que involucra prácticas pedagógicas, procesos cognitivos y contextos socioculturales que influyen directamente en la construcción del conocimiento geométrico.

En este marco, los objetos de la geometría se pueden clasificar en tres niveles:

1. Concretos: formas bidimensionales (figuras planas) y tridimensionales (cuerpos geométricos) que pueden observarse y manipularse físicamente.

2. Conceptuales: incluyen representaciones de 1D, 2D, 3D y hasta 4D, cuya comprensión requiere procesos de abstracción mental.

3. Abstractos: corresponden a entes geométricos, relaciones, métricas y operaciones formales sin representación tangible, vinculados al razonamiento matemático avanzado.

Asimismo, los procesos propios de la actividad geométrica incluyen visualizar,

representar, conceptualizar, conjeturar y argumentar. Estos procesos están interrelacionados y tienen como finalidad fortalecer la comprensión geométrica:

1. Visualizar: percibir e identificar objetos y relaciones espaciales, construyendo imágenes mentales.
2. Representar: trasladar estas imágenes a dibujos, modelos físicos o digitales.
3. Conceptualizar: identificar, definir y clasificar elementos, estructurando el conocimiento.
4. Conjeturar: explorar, inducir y formular hipótesis sobre propiedades geométricas.
5. Argumentar: justificar y demostrar formalmente las conjeturas.

Investigaciones recientes muestran que la mediación con RA potencia estos procesos al permitir exploraciones interactivas, retroalimentación inmediata y manipulación tridimensional significativa. Bulut et al. (2023), analizaron 42 estudios sobre RA en la educación matemática y concluyeron que esta tecnología facilita una mejor comprensión de los conceptos matemáticos, mejora la capacidad espacial, permite exploraciones interactivas en tres dimensiones, favorece el aprendizaje colaborativo y ofrece feedback inmediato en entornos de manipulación significativa (aunque también señalaron que un alto nivel de motivación no garantiza automáticamente ganancias de conocimiento).

Pensamiento geométrico-métrico según el MEN

En el contexto colombiano, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) establece el pensamiento geométrico-métrico como uno de los cinco ejes fundamentales para orientar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos. Según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (2006), este pensamiento busca desarrollar la capacidad para comprender, representar, analizar y transformar el espacio y las formas, así como utilizar magnitudes y medidas para interpretar y resolver situaciones reales y matemáticas.

El pensamiento geométrico-métrico se compone de dos dimensiones interrelacionadas:

1. Componente geométrico: se orienta a que los estudiantes comprendan y utilicen propiedades de figuras y cuerpos geométricos en contextos bidimensionales y tridimensionales. Implica habilidades para visualizar, describir, representar, analizar y razonar sobre relaciones espaciales, reconociendo patrones, simetrías y transformaciones.

2. Componente métrico: se refiere a la comprensión y uso de magnitudes, unidades de medida e instrumentos para cuantificar atributos como longitud, área, volumen, ángulos y tiempo. También incluye habilidades de estimación, comparación, conversión entre sistemas y resolución de problemas contextualizados.

Los enfoques actuales del MEN enfatizan el desarrollo de competencias orientadas a la resolución de problemas, la argumentación y la modelación, aspectos reforzados en las actualizaciones curriculares y orientaciones recientes para la educación matemática (MEN, 2018)

Modelo MKT: conocimiento especializado para enseñar geometría

La enseñanza efectiva de la geometría requiere un conocimiento especializado que articule saber disciplinar y didáctico. Shulman (1986) introduce el Pedagogical Content Knowledge (PCK) como un saber docente que integra contenido y enseñanza. Reinterpretando la línea de estudio impulsada inicialmente por Shulman, el equipo de investigadores de la Universidad de Michigan ha orientado su trabajo hacia la comprensión de la naturaleza y alcance del conocimiento necesario para enseñar Matemáticas.

Ball et al. (2005, citado por Ciccioli y Sgreccia, 2020), retomó el concepto de PCK introducido por Shulman y destacó que la enseñanza matemática articula, de manera inseparable, la comprensión del contenido con los procesos de enseñanza y aprendizaje, lo cual exige un tipo de

saber particular que pertenece específicamente al quehacer docente, pero atravesado por una dimensión esencialmente matemática. Este saber constituye un conocimiento adicional y especializado, por lo cual proponen, así, un conjunto de seis dominios que constituyen el MKT agrupados en dos grandes campos: conocimiento de la materia y PCK.

Por una parte, el conocimiento común del contenido (CCK) abarca aquel saber matemático que se emplea de forma habitual en diversos campos profesionales y científicos que hacen uso de la geometría. Este tipo de conocimiento se activa, por ejemplo, al distinguir entre soluciones válidas y erróneas, al detectar definiciones imprecisas o incorrectas en materiales didácticos, o al emplear adecuadamente términos, símbolos y notaciones propias de la disciplina.

Así mismo, el conocimiento especializado del contenido (SCK) hace referencia a un conjunto de acciones propias de la labor docente, profundamente vinculadas con la naturaleza específica del contenido geométrico. Este saber se requiere, por ejemplo, cuando el profesor debe ofrecer fundamentaciones claras ante las dudas del estudiantado, seleccionar y emplear diversas representaciones de un mismo objeto geométrico, así como establecer vínculos significativos entre ellas, o decidir qué representación es más adecuada según el contexto.

Del mismo modo, implica la capacidad de construir e interpretar significados dentro de las explicaciones geométricas, formular definiciones pertinentes al propósito y al nivel en el que se trabajan, explorar la extensión de los conceptos y procedimientos evaluando sus límites de aplicabilidad, generalizar situaciones, analizar críticamente el lenguaje geométrico y construir preguntas que promuevan un pensamiento profundo y productivo.

Más aún el conocimiento horizonte del contenido (HCK) se refiere a la comprensión de cómo los distintos temas geométricos se articulan entre sí, proporcionando una mirada integrada y coherente del campo. Este tipo de saber permite

reconocer la estructura global de la geometría y anticipar cómo los contenidos actuales se conectan con ideas, así como en niveles superiores de formación.

Por otro lado, el conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS) abarca la comprensión de cómo piensan y aprenden los estudiantes, lo que posibilita anticipar sus posibles avances, obstáculos, errores recurrentes y formas de razonamiento. Este dominio se manifiesta cuando el docente selecciona actividades que resulten significativas para el grupo, analiza las respuestas o intervenciones que surgen en la clase y reconoce patrones de pensamiento que revelan incomprendiones, vacíos conceptuales o usos poco precisos del lenguaje geométrico.

Se debe agregar que el conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT) incluye las formas didácticas de abordar el desarrollo de un contenido para hacerlo accesible a otros. Comprende el uso de recursos, el establecimiento de conexiones con ideas previas, así como la organización de instrumentos adecuados para evaluar contenidos específicos.

De ahí que el conocimiento del contenido y del currículum (KCC) implica la toma de decisiones y la planificación respecto a cómo se estructura y se orienta la enseñanza de acuerdo con los lineamientos curriculares, los programas oficiales y los recursos instruccionales disponibles para un nivel educativo determinado.

Este dominio se relaciona directamente con las disposiciones regulatorias tanto institucionales como jurisdiccionales. En el marco de este estudio, el modelo adquiere concreción al articular estos componentes con las características propias del pensamiento geométrico-métrico. La realidad aumentada y la enseñanza para los maestros en formación.

Teorías sobre la realidad aumentada (RA)

La Realidad Aumentada (RA) constituye una tecnología educativa en constante evolución, cuyo estudio involucra aportes teóricos clásicos y

desarrollos contemporáneos. En términos generales, la RA se define como un entorno que integra elementos virtuales y reales de manera simultánea, generando experiencias inmersivas que enriquecen la percepción del usuario mediante capas de información digital superpuestas al espacio físico.

En 1995, Paul Milgram y sus colegas introdujeron el concepto del continuo de la realidad-virtualidad, ubicando la RA en un punto intermedio entre el entorno real y el virtual:

La Realidad Aumentada se ubica en una zona intermedia dentro del continuo de la realidad-virtualidad, en la cual el entorno real se complementa con elementos virtuales superpuestos que coexisten espacialmente con la realidad física del usuario” (Milgram et al., 1995, p. 283).

Posteriormente, Azuma (1997) formalizó esta definición al identificar tres características esenciales de la RA: (a) la combinación de elementos reales y virtuales; (b) la interactividad en tiempo real; y (c) el registro tridimensional. Según el autor: “La Realidad Aumentada es un sistema que combina lo real y lo virtual, es interactivo en tiempo real y está registrado en tres dimensiones” (Azuma, 1997, p. 356).

Estas características distinguen a la RA de otros entornos virtuales y la convierten en una herramienta particularmente útil para la educación científica y matemática, donde la comprensión de fenómenos tridimensionales resulta esencial. De Pedro (2011) amplía esta perspectiva al señalar que:

La Realidad Aumentada complementa la percepción del entorno real añadiendo información generada por computador, lo cual posibilita que el estudiante observe y manipule objetos virtuales integrados en su propio espacio físico, generando una experiencia de aprendizaje más rica y significativa (p. 303).

En el ámbito de la educación universitaria, la RA adquiere una relevancia particular para la enseñanza de la geometría: permite que los estudiantes visualicen, manipulen y exploren objetos geométricos en tres dimensiones, superando las

limitaciones de la representación bidimensional en el aula tradicional. Por ejemplo, la RA posibilita que futuros licenciados en Matemáticas observen transformaciones espaciales, simetrías, relaciones métricas y construcciones volumétricas desde una perspectiva interactiva, lo que fortalece tanto el razonamiento geométrico como el pensamiento espacial.

Investigaciones recientes apoyan estos planteamientos. Una revisión sistemática reciente sobre la RA en educación matemática mostró que esta tecnología se aplica frecuentemente en temas de geometría y medida, y que puede tener efectos positivos en la motivación, la capacidad espacial, la creatividad, el uso de estrategias de nivel alto y la autoeficacia estudiantil (Íslim et al., 2024).

Asimismo, una investigación centrada en el contexto universitario (y otros niveles) concluyó que las aplicaciones de RA en educación superior presentan un efecto global considerable del (89.6%) en los resultados de aprendizaje, destacando que el diseño instruccional y los resultados esperados actuaron como moderadores claves (Li et al., 2023).

Por su parte en el contexto de la geometría en educación superior, la RA puede servir como mediación didáctica poderosa: al superponer objetos 3D manipulables en el espacio de aprendizaje físico, favorece la construcción activa del conocimiento, facilita la visualización de relaciones geométricas complejas y promueve la indagación, la experimentación y la reflexión. En este sentido, la RA se convierte en un recurso que potencia no sólo la comprensión conceptual sino también la apreciación visual-espacial de la geometría, contribuyendo a que los estudiantes universitarios desarrollen una visión integral de los objetos geométricos y sus transformaciones.

En cuanto a las actividades lúdico-pedagógicas con Realidad Aumentada para maestros en formación en Matemáticas pueden integrarse en una secuencia que articula visualización, modelación y argumentación geométrico-métrica: (a) un Laboratorio RA de cuerpos y secciones, donde se exploran sólidos, se manipulan vistas 3D y se generan secciones cónicas con planos virtuales para

estimar y validar áreas y volúmenes; (b) una Ruta de transformaciones isométricas tipo “scavenger”, que exige identificar traslaciones, rotaciones y reflexiones superponiendo rejillas y vectores sobre objetos reales y justificar invarianzas métricas con capturas y notas.

(c) Medición aumentada en contexto, usando cintas, ejes y escalas virtuales para contrastar métodos directos e indirectos (semejanza, Pitágoras, trigonometría) y reportar errores y tolerancias; (d) Diseño de manipulativos RA en microenseñanza (p. ej., bloques multibase y redes de sólidos) con rúbrica de PCK para seleccionar representaciones, anticipar errores y formular andamiajes; (e) Prueba de conjeturas con RA + GeoGebra/AR, modelando y validando propiedades y relaciones métricas con discusión de contraejemplos.

(f) De lo físico a lo formal (RME + transposición didáctica), pasando de escenas reales capturadas con RA a la abstracción, el escalado, la semejanza y la formalización (definiciones, teoremas, demostraciones); y (g) Evaluación formativa aumentada, con listas de cotejo y rúbricas superpuestas al entorno para valorar precisión métrica, uso de representaciones múltiples, justificación y comunicación.

La literatura reciente respalda estas decisiones didácticas: las revisiones sistemáticas reportan efectos positivos en comprensión, visualización espacial y motivación en geometría y advierten la necesidad de una integración pedagógica explícita (Bulut et al. 2023), mientras que estudios con docentes en formación muestran mejoras en el dominio de recursos y en la disposición para enseñar con RA mediante manipulativos 3D (Montero et al., 2025). Finalmente, a pesar de estos beneficios, la implementación de la RA en entornos universitarios exige atender cuestiones como la infraestructura tecnológica, la formación del profesorado, la integración curricular y la evaluación de los efectos a más largo plazo.

Teoría de los niveles de razonamiento geométrico de van hiele

La teoría de Van Hiele (1958) describe cinco niveles progresivos de razonamiento geométrico que explican cómo los estudiantes construyen comprensión sobre las figuras y sus propiedades. Estos niveles no dependen de la edad, sino de la experiencia didáctica y del tipo de mediación que recibe el aprendiz Fuys et al. (1988).

1. Visualización (Reconocimiento): el estudiante identifica figuras por su apariencia global, sin atender a sus propiedades formales. La enseñanza con RA puede apoyarse en objetos tridimensionales que faciliten la percepción y manipulación visual.

2. Análisis: el sujeto comienza a reconocer características y propiedades (lados, ángulos, simetrías), aunque aún no establece relaciones entre ellas. La RA permite resaltar medidas y comparaciones métricas en tiempo real.

3. Deducción informal u orden: el estudiante comprende relaciones entre propiedades (por ejemplo, que todo cuadrado es un rectángulo) y puede justificar observaciones de manera empírica. Con RA se pueden explorar invariantes geométricas al transformar figuras.

4. Deducción formal: se desarrolla la capacidad de construir demostraciones dentro de un sistema axiomático. La RA puede funcionar como entorno de verificación visual de teoremas.

5. Rigor: el pensamiento se caracteriza por la abstracción de estructuras y sistemas axiomáticos distintos; el estudiante compara teorías geométricas y argumenta con base en principios lógicos.

Desde otra óptica, en el proceso de formación de maestros de matemáticas, la implementación de actividades lúdico-pedagógicas alineadas con los niveles de la teoría de Pierre Van Hiele facilita el desarrollo progresivo del pensamiento geométrico-métrico, comenzando por la visualización (nivel 0) mediante un “Safari AR de sólidos y secciones”, donde los futuros docentes reconocen figuras tridimensionales y sus huellas bidimensionales en entorno de realidad aumentada; luego avanzan al análisis (nivel 1) con un “Laboratorio AR de atributos y medidas” para relacionar propiedades geométricas y magnitudes métricas.

En el nivel 2 (orden/relaciones informales) realizan una “Búsqueda AR de isometrías” en el campus, identificando traslaciones, rotaciones y reflexiones e infiriendo invariantes métricas; el nivel 3 (deducción informal) se aborda con el “Diseño-validación AR de conjeturas sobre cuadriláteros”, donde los maestros en formación manipulan vértices en un entorno virtual y generan patrones antes de escribir sus conjeturas; finalmente, en el nivel 4 (deducción formal) se trabaja en los “Caminos de prueba guiada con RA”, desde observaciones RA hasta esquemas de prueba rigurosos.

Estos trayectos se enriquecen con secuencias centradas en pensamiento geométrico-métrico mediante “Rutas AR de secciones cónicas” y “Métricas en contexto con overlays RA”, complementadas por microenseñanzas con pauta Van Hiele + RA que fortalecen el conocimiento didáctico del futuro docente. (Waluya, 2022).

METODOLOGÍA

La elaboración de este artículo se desarrolló mediante un proceso metodológico de carácter cualitativo-documental, orientado desde la lógica propia de los estudios de revisión teórica. En primer lugar, se definió la naturaleza del manuscrito como un artículo de revisión teórica, decisión sustentada en la necesidad de analizar, integrar y articular marcos conceptuales clásicos y contemporáneos sobre el pensamiento geométrico-métrico, el modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), la teoría de niveles de razonamiento de Van Hiele y la Realidad Aumentada (RA) como mediación didáctica, tal como se formuló en el diseño inicial del texto.

A partir de esta decisión base, se construyó un cuerpo argumental organizado en torno a tres temas orientadores: (a) una narración detallada del tema de interés, (b) la descripción del aporte original e inédito del artículo, y (c) la argumentación del valor disciplinar de la temática para el campo de la enseñanza de la geometría. En la fase siguiente, se

emprendió la búsqueda, selección y análisis de fuentes teóricas y empíricas actualizadas, guiada por criterios de pertinencia, vigencia y relevancia conceptual. Se estableció como requisito la identificación de al menos treinta documentos, de los cuales veinticuatro debían tener una vigencia no mayor a cinco años.

La muestra documental se conformó con artículos científicos indexados, tesis doctorales recientes, libros especializados y capítulos de libros que profundizan en los marcos conceptuales relevantes.

Para ello, se consultaron bases de datos académicas especializadas como Scopus, Web of Science, ERIC, SciELO, Dialnet, SpringerLink y repositorios institucionales, además de las fuentes bibliográficas proporcionadas durante el desarrollo de la unidad curricular. Esta fase permitió construir el arqueo conceptual requerido y organizar la información mediante una matriz analítica de consistencia, donde se clasificaron las fuentes según tipo, enfoque, aportes, métodos empleados y resultados.

Finalmente, se realizó una lectura crítica, comparativa y categorial del corpus documental. Este análisis se enfocó en identificar convergencias y divergencias entre autores, tendencias teóricas, constructos clave y hallazgos empíricos relevantes. A partir de este ejercicio, se delimitaron categorías analíticas centrales: pensamiento geométrico-métrico, procesos cognitivos asociados (visualización, representación, argumentación), conocimiento matemático para la enseñanza (MKT), teoría de los niveles de Van Hiele, y Realidad Aumentada. Una vez establecidas las categorías, se procedió a la organización, integración y articulación teórica del material revisado.

HALLAZGOS

El análisis cualitativo-documental evidenció la existencia de tres núcleos centrales que articulan el pensamiento geométrico-métrico, el MKT y la Realidad

Aumentada desde un marco comprensivo coherente. El primer núcleo se relaciona con la concepción del pensamiento geométrico-métrico como un constructo complejo y multidimensional sustentado en la interacción entre visualización, razonamiento espacial, modelación, uso de representaciones y comprensión de magnitudes. Estudios contemporáneos mostraron que esta multidimensionalidad se expresa con especial intensidad cuando el estudiante transita entre representaciones 2D-3D, genera comparaciones entre áreas o volúmenes, o moviliza definiciones formales de figuras (Caviedes et al., 2022).

Las investigaciones en formación docente coincidieron en que la articulación entre percepción espacial, conceptualización formal y comunicación matemática constituye un eje estructural del desarrollo del pensamiento geométrico, particularmente en contextos escolares y universitarios que requieren el análisis de propiedades, clasificaciones y transformaciones geométricas (Liñán-García et al., 2021).

Un segundo núcleo emergente se relaciona con el papel del Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) como marco potente para comprender las demandas cognitivas y didácticas de la enseñanza de la geometría. Los estudios revisados mostraron que el conocimiento especializado del contenido (SCK) y el conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS) son dimensiones especialmente críticas cuando se abordan definiciones, relaciones geométricas o procesos de razonamiento complejo, como lo evidencian trabajos en torno a definiciones de cuadriláteros, figuras 2D o geometría analítica en futuros profesores (Ciccioli y Sgreccia, 2020).

Asimismo, se identificó que el conocimiento horizonte del contenido (HCK) adquiere relevancia en la planificación de trayectorias y progresiones de aprendizaje geométrico-métrico, convergiendo con los niveles de razonamiento de Van Hiele y con la necesidad de movilizar conocimientos especializados en situaciones reales de aula. Las tesis de Monroy (2023) reforzaron esta idea al evidenciar que el dominio del docente sobre los sistemas de representación y las herramientas digitales influye

decisivamente en la calidad de las tareas y en la emergencia de formas de razonamiento matemático.

El tercer núcleo hallado corresponde a la Realidad Aumentada (RA) como mediación didáctica coherente con los procesos cognitivos vinculados al desarrollo del pensamiento geométrico-métrico. La literatura más reciente reveló efectos consistentes en la mejora de la visualización espacial, la inteligencia espacial, la manipulación significativa de objetos 3D, el análisis de invariantes y la fluidez representacional (Morales y Lozano, 2025). Investigaciones en diversos niveles educativos desde educación básica hasta formación universitaria demostraron que la RA favorece la comprensión de la geometría volumétrica, la interactividad, la motivación y la exploración activa de propiedades geométricas.

Finalmente, el análisis transversal permitió identificar un vacío recurrente y significativo: aunque existe amplia evidencia sobre efectos motivacionales, perceptivos, metacognitivos y de razonamiento espacial asociados al uso de RA en la enseñanza de la geometría (Flavin, 2025), persiste una escasez de estudios que integren de manera articulada los tres ejes analíticos centrales: pensamiento geométrico-métrico, MKT y RA en la formación inicial docente. Esta ausencia de articulación profunda reafirma la pertinencia del presente trabajo como propuesta integradora que aporta un marco de lectura crítico para un campo en consolidación.

CONCLUSIONES

La revisión realizada permite reconocer que el pensamiento geométrico-métrico constituye un constructo multidimensional cuya comprensión exige abordar simultáneamente los procesos cognitivos, las estructuras conceptuales y las mediaciones didácticas que lo configuran. El análisis del corpus documentado muestra que su desarrollo no ocurre de manera espontánea, sino que depende

de experiencias de aprendizaje diseñadas cuidadosamente que favorecen la visualización, la modelación, la argumentación y el tránsito entre representaciones, dimensiones que son decisivas para la comprensión profunda de la geometría y sus aplicaciones.

En relación con la formación inicial de docentes, los marcos conceptuales revisados evidencian que el conocimiento especializado requerido para enseñar geometría demanda una comprensión integrada del contenido, de los modos en que los estudiantes construyen significados y de las progresiones de razonamiento propias del campo. El modelo MKT ofrece una mirada transversal de estos elementos, permitiendo identificar los dominios profesionales que el profesor debe movilizar para diseñar, secuenciar y evaluar situaciones que respondan a la complejidad del pensamiento geométrico-métrico. Esta perspectiva contribuye a superar visiones simplificadas de la enseñanza, al situar como eje central el análisis didáctico del contenido.

La Realidad Aumentada emerge, dentro de esta revisión, como una mediación coherente con las exigencias cognitivas de la geometría

contemporánea. Sus potencialidades para la manipulación de objetos tridimensionales, la exploración activa de propiedades y la convergencia entre lo concreto y lo abstracto, abren posibilidades para enriquecer las prácticas formativas en el aula universitaria. No obstante, su incorporación efectiva requiere criterios pedagógicos claros, una integración curricular planificada y una comprensión profunda del papel que cumplen las tecnologías como mediadoras del conocimiento, y no como sustitutos del quéhacer docente.

Desde una mirada crítica, la revisión documental evidencia una disrupción del campo: abundan estudios sobre pensamiento geométrico, otros sobre conocimiento docente, y otros sobre tecnologías emergentes; de forma aislada. Sin embargo, son escasas las propuestas que articulan de manera sistemática estas tres dimensiones en la formación inicial de profesores de matemáticas. Esta ausencia de articulación teórico-metodológica constituye una oportunidad para generar investigaciones que aborden el diálogo entre modelos de conocimiento docente, progresiones de razonamiento y mediaciones digitales, especialmente en la geometría universitaria.

REFERENCIAS

- Azuma, R. (1997). A survey of augmented reality. *Presence: Teleoperators and Virtual Environments*, 6(4), 355–385. <https://doi.org/10.1162/pres.1997.6.4.355>
- Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Ball, D., Hill, H., y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(3), 14–46. <http://hdl.handle.net/2027.42/65072>
- Bulut, M., y Borromeo Ferri, R. (2023). A systematic literature review on augmented reality in mathematics education. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 11(3), 556–572. <https://doi.org/10.30935/scimath/13124>
- Camargo, L. (2021). La enseñanza y el aprendizaje de la geometría en la formación de docentes de matemáticas: fundamentos del modelo EA Geo. Universidad Pedagógica Nacional.
- Caviedes Barrera, S. (2022). Caracterización del conocimiento especializado sobre el área de figuras planas en estudiantes para maestro (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona. https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2023/hdl_10803_688280/scb1de1.pdf

- Ciccioli, V., y Sgreccia, N. (2020). Conocimiento matemático para la enseñanza de geometría analítica en futuros profesores. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 15(1), 1–27. http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1850-66662020000100001
- Clements, D. H., y Sarama, J. (2021). *Learning and Teaching Early Math: The Learning Trajectories Approach* (3.ª ed.). Routledge. ISBN 978-0-367-52197-4
- De Pedro, J. (2011). Realidad aumentada y educación: nuevos escenarios de aprendizaje. *Revista de Medios y Educación*, (38), 299–313.
- Flavin, M. (2025). Augmented reality for area measurement reasoning of elementary students. *Education Technology Research and Development*, 73, 1–23. <https://acortar.link/6UYNwS>
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
- Fuys, D., Geddes, D., y Tischler, R. (1988). The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, 3, 1–196.
- Hernández, F., González, M., y Salinas, J. (2019). Realidad aumentada y aprendizaje geométrico: una revisión de experiencias educativas. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa (RELATEC)*, 18(1), 40–57. <https://doi.org/10.17398/1695-288X.18.1.40>
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES). (2022). Informe nacional de resultados del examen Saber Pro y Saber TyT – 2021. Bogotá: ICFES.
- International Association for the Evaluation of Educational Achievement. (2020). TIMSS 2019 international results in mathematics and science. IEA.
- Islim, O. F., Namlı, Ş., Sevim Çırak, N., Özçakır, B., y Lavicza, Z. (2024). Augmented reality in mathematics education: A systematic review. *Participatory Educational Research*, 11(4), 115–139. <https://doi.org/10.17275/per.24.52.11.4>
- Johnson, E., y Larsen, S. (2021). Students' development of geometric reasoning through inquiry-based instruction: A conceptual analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 52(4), 415–440.
- Jones, K., Fujita, T., Kondo, Y., y Kumakura, H. (2020). Spatial reasoning skills about 2D representations of 3D geometrical shapes in grades 4 to 9. *Mathematics Education Research Journal*, 32(2), 235–255. <https://link.springer.com/article/10.1007/s13394-020-00335-w>
- Kurniawan, S., y Yoon, G. (2023). Augmented reality applications for mathematical creativity: Implications, features and potential. Springer. <https://doi.org/10.1007/s40692-023-00287-7>
- Li, G., Luo, H., Chen, D., Wang, P., Yin, X., y Zhang, J. (2025). Augmented reality in higher education: A systematic review and meta-analysis (2000–2023). *Education Sciences*, 15(6), 678. <https://doi.org/10.3390/educsci15060678>
- Liñán-García, M. del M., Muñoz-catalán, M. C., Contreras, L. C., y Barrera-Castarnado, V. J. (2021). Specialised knowledge for teaching geometry in a primary education class. *Mathematics*, 9(21), 2805. <https://www.mdpi.com/2227-7390/9/21/2805>
- Milgram, P., Takemura, H., Utsumi, A., y Kishino, F. (1995). Augmented reality: A class of displays on the reality–virtuality continuum. *Proceedings of Telemanipulator and Telepresence Technologies*, 2351, 282–292. <https://doi.org/10.1117/12.197321>
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Bogotá: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2018). Lineamientos Curriculares. <https://www.mineducacion.gov.co/portal/micrositios-preescolar-basica-y-media/Direccion-de-Calidad/Referentes-de-Calidad/339975:Lineamientos-curriculares>
- Ministerio de Educación Nacional. (2017). Plan Nacional Decenal de Educación 2016–2026. Bogotá: MEN.

- Monroy Guzmán, L. (2023). Formas de razonamiento... Universidad del Valle.
<https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/server/api/core/bitstreams/1a97f268-1d54-492d-8d3f-bf0cd8a10be1/content>
- Montero-Izquierdo, A. I., et al. (2025). Augmented reality 3D multibase blocks: A study with pre-service teachers. *Education Sciences*, 15(8), 954. <https://doi.org/10.3390/educsci15080954>
- Morales Méndez, G., y Lozano Avilés, A. B. (2025). Realidad aumentada y GeoGebra 3D... *Revista de Educación a Distancia*, 25(82). <https://revistas.um.es/red/article/view/644051>
- Naciones Unidas. (2015). Transforming our world: The 2030 Agenda for Sustainable Development. https://www.un.org/en/development/desa/population/migration/generalassembly/docs/globalcompact/A_RES_70_1_E.pdf
- Pittalis, M., y Christou, C. (2020). Students' cognitive development in geometry: Revisiting the van Hiele theory. *Educational Studies in Mathematics*, 104(1), 101–118.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Sinclair, N., y Bruce, C. (2021). Digital tools and geometric thinking. *ZDM Mathematics Education*, 53(3), 517–530.
- Usiskin, Z. (2018). Revisiting the van Hiele levels: A re-examination. *Mathematics Teacher*, 111(4), 270–279.
- Van Hiele, P. M. (1958). *The child's thought and geometry*. University of Utrecht.
- Villanueva, M., y Navarro, E. (2017). Dificultades y desafíos en la enseñanza de la geometría escolar. *Revista Educación Matemática*, 29(2), 95–110.
- Waluya, S. B. (2022). A systematic review on geometric thinking. *European Journal of Education Research*, 11(3). https://www.eu-jer.com/articles/EU-JER_11_3_1535.pdf