Propuesta didáctica para la aplicación de diferentes concepciones de la noción de fracción

Didactic proposal for the application of different conceptions of the notion of fraction

Didactic proposal for the application of different conceptions of the notion of fraction

Yuraima Lilibeth Ramírez Rondón
yura2572@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-0421-4893

Universidad Pedagógica Experimental Libertador- Instituto Pedagógico de Caracas, Venezuela.
UNESCO - AAUCA Universidad Afroamericana de África Central de Guinea Ecuatorial

Artículo recibido en julio 2020, arbitrado en septiembre, publicado en enero de 2021

RESUMEN

La necesidad de una herramienta didáctica que permita al docente gestionar los conocimientos en los jóvenes fue la motivación para el desarrollo del estudio que pretende diseñar una propuesta de enseñanza basada en tres concepciones del concepto de fracción "Fraccionamiento de la unidad, como operador y cociente exacto", uniendo manipulación y realidad del contexto social hasta alcanzar un aprendizaje significativo. Se aplicó a estudiantes del Liceo Leopoldo Aguerrevere en el año escolar 2004-2007, Se utilizó una investigación observacional, participativa de tipo cualitativo, bajo el paradigma interpretativo. Como instrumento de evaluación se contó con escalas de estimación, registros anecdóticos, entre otros. El efecto positivo en los resultados finales de la aplicación, la actitud de los estudiantes hacia la matemática cambió radicalmente, lograban aplicar los contenidos matemáticos en su vida cotidiana, este cambio fue tanto desde el punto de vista cualitativo como cuantitativo.

Palabras clave: *Didáctica; matemática; proporciones; concepciones de fracción*

ABSTRACT

The need for a didactic tool that allows the teacher to manage knowledge in young people was the motivation for the development of the study that aims to design a teaching proposal based on three conceptions of the concept of fraction "Fractionation of the unit, as operator and exact quotient", uniting manipulation and reality of the social context until reaching significant learning. It was applied to students of the Lyceum Leopoldo Aguerrevere in the 2004-2007 school year. An observational, participatory

qualitative research was used, under the interpretive paradigm. As an evaluation instrument there were estimation scales, anecdotal records, among others. The positive effect on the final results of the application, the attitude of the students towards mathematics changed radically, they managed to apply the mathematical contents in their daily life, this change was both from a qualitative and quantitative point of view.

Keywords: *Didactics, mathematics, proportions, fraction conceptions.*

RESUMO

A necessidade de uma ferramenta didática que permita ao professor gerenciar o conhecimento dos jovens foi a motivação para o desenvolvimento do estudo que visa elaborar uma proposta de ensino. baseado em três concepções do conceito de fração "Fracionamento da unidade, como operador e quociente exato", unindo manipulação e realidade do contexto social até alcançar um aprendizado significativo. Foi aplicada a estudantes do Liceu Leopoldo Aguerrevere no ano letivo de 2004 a 2007. Foi utilizada uma pesquisa qualitativa observacional participativa, sob o paradigma interpretativo. Como instrumento de avaliação, foram utilizadas escalas de estimação, registros anedóticos, entre outros. O efeito positivo nos resultados finais da aplicação, a atitude dos alunos em relação à matemática mudou radicalmente, eles conseguiram aplicar o conteúdo matemático no seu dia a dia, essa mudança foi tanto do ponto de vista qualitativo quanto quantitativo.

Palavras chave*. Didática; matemática; proporções; concepções de fração*

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre la enseñanza de las matemáticas no es solamente observación y análisis de los procesos que día a día se producen en el aula, sino que también se deben diseñar las situaciones didácticas que se analizan para poder determinar las condiciones en las que se produce la apropiación del saber por parte de los estudiantes. Por ello, nació la necesidad de diseñar montajes experimentales o de desarrollar una "ingeniería didáctica" posible de investigación. Para Artigue, (1995) la Ingeniería didáctica:

> Consiste en concebir un proceso de enseñanza que responda a objetivos de aprendizaje determinados a priori en función de un marco teórico y de hipótesis, en realizar este proceso, en recabar observaciones y en confrontar las observaciones con lo que se esperaba (p. 42).

La ingeniería didáctica según Juárez y Ruiz (2019), plantea problemas de manera innovadora de un lado, la realización experimental en sí supone de antemano una

"transmisión" en dirección del o de los profesores que serán los actores del proceso; y del otro, busca el desarrollo del pensamiento matemático y la construcción de conocimiento de parte de los estudiantes (p.24). Estos mismos autores consideran que:

> La investigación en matemática educativa está basada en la interacción sistémica de cuatro componentes (didáctica, epistemológica, cognitiva y social) de la construcción social de conocimiento. Toda propuesta didáctica basada en esta aproximación supone un cambio significativo del discurso matemático escolar.

Se le llamó ingeniería didáctica por su comparación con la ingeniería en la acepción normal de la palabra. La ingeniería didáctica no sólo se apoya en resultados científicos, sino que además realiza una toma de decisiones y de control sobre los componentes en el proceso. Se trata también de una metodología de investigación que guía las experimentaciones en clase, y para construirla, se debe realizar el análisis de tipo: (a) epistemológico de los contenidos, (b) de la enseñanza tradicional, (c) de las concepciones de los estudiantes, sus dificultades y obstáculos, entre otros.

El análisis de las concepciones que tienen los estudiantes, sus dificultades y los posibles obstáculos es esencial para la concepción de la ingeniería didáctica. Este trabajo no pretende cubrir todos los pasos de una ingeniería didáctica, por lo extenso de su estructura, sin embargo, se tomarán en cuenta ciertos puntos de ella para el diseño de la propuesta como solución del problema educativo.

Teorías que sustentan la investigación

La metodología didáctica que se sigue en los programas de estudio y en los libros de texto de matemáticas de primer año consiste en diseñar estrategias que van de lo simple a lo complejo y que permita "asimilar" los conocimientos. El esquema de enseñanza es sistemático, donde predomina la tendencia por considerar a las matemáticas como un cuerpo ya elaborado. La enseñanza en este caso consiste en la transmisión de una información por parte del profesor y el aprendizaje es considerado como la recepción pasiva e individual por parte del estudiante. Se busca la respuesta a

un problema, no se analiza el proceso, no hay actividad creativa, no existe un rol activo del estudiante, mostrando con esto a las matemáticas como frías.

En cambio, si se considera que el conocimiento no se descubre, sino que se construye por medio de la experimentación, contrastación y justificación de conjeturas en las distintas situaciones problemáticas, se está proponiendo a las matemáticas como una actividad social y cultural, ya que el conocimiento se forma socialmente en el aula. En este caso, el proceso se vuelve tan importante como el resultado. Los problemas interesantes son aquellos en los que hay que experimentar, conjeturar, explorar y descubrir (Cantoral y Farfán, 1998). En todo este proceso, el docente orienta, incentiva, facilita la apropiación del conocimiento, ayuda a dar sentido a los problemas que debe resolver, les motiva a encontrar la verdadera utilidad de las matemáticas.

La didáctica de la matemática estudia los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar y universitaria. Por lo tanto, se propone describir y explicar los fenómenos relativos a las relaciones entre enseñanza y aprendizaje. No se trata de “una buena manera de enseñar” un concepto determinado sino ocuparse, por ejemplo, de la organización de una actividad cuya intención sea el aprendizaje de un cierto saber (Farfán, 2001).

Brousseau (1986), determina que en toda situación de enseñanza existe un conjunto de relaciones establecidas tanto de forma explícita como implícita entre un estudiante o un grupo de estudiantes, un medio (que vislumbra ocasionalmente instrumentos y recursos) y un sistema educativo (representado por el docente) con el fin de lograr que estos estudiantes alcancen un saber formado o en vías de formación.

Pero no únicamente se debe tener en cuenta este conjunto de relaciones, sino que, por otro lado, a pesar de toda la complejidad en situaciones de enseñanza y aprendizaje, las estructuras mentales de los estudiantes pueden ser comprendidas y que tal comprensión ayudará a conocer mejor los modos en que el pensamiento productivo y el aprendizaje tiene lugar (Schoenfeld, 2000). Para esto es necesario situar

a la didáctica de la matemática dentro de las interacciones entre múltiples disciplinas: Psicología, Pedagogía, Sociología, Matemática, entre otras.

Cuando a los estudiantes se les facilita la enseñanza de un concepto matemático, éste adquiere el status de objeto matemático; es decir, se les presenta como un ente abstracto. Este objeto emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo o tipo de problemas matemáticos (Godino y Batanero, 1994). Los estudiantes deben aprender a realizar como una actividad necesaria, conversiones en distintos registros. La coordinación entre ellos es de vital importancia para el desarrollo del pensamiento. Este cambio de registros no se realiza en forma espontánea, pues el pensamiento moviliza un solo registro de representación. Bajo esta perspectiva, una de las actividades fundamentales de los profesores es enfrentar a los estudiantes a problemas donde, para poder resolverlos, necesitan realizar conversiones entre distintos registros.

La didáctica de la matemática se considera como “El estudio de la evolución de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los estudiantes con el objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto” (Brousseau, 1986). Se trata de estudiar el funcionamiento de un sistema (sistema didáctico), en el que se destacan tres elementos fundamentales: profesor, estudiante y saber a enseñar.

La transposición didáctica

Este término corresponde al conjunto de transformaciones que experimenta un saber con la finalidad de ser enseñado, lo cual implica que este sea reformulado para que pueda ser transferido a un contexto diferente al de su origen (Cacho, 2005). Los centros del saber son transformados, se reformulan, con el fin de transponerse en un contexto diferente al que se trataron en su origen.

Todo plan de enseñanza y aprendizaje se realiza inicialmente con la identificación y la designación de contenidos de saberes como contenidos a enseñar, del conocimiento

previo al conocimiento nuevo. Un contenido de saber que ha sido determinado como saber a enseñar sigue desde ese momento un conjunto de transformaciones adaptativas que es lo que le permitirá ser apto para situarse entre los objetivos de la enseñanza. (Chevallard, 1991, citado por Cacho (2005, p.4). Vale destacar que en la transposición didáctica resulta importante considerar los diferentes saberes que se dan en el proceso de enseñanza. Al respecto importa para esta investigación el saber a enseñar y el saber enseñado.

El “Saber enseñado”, es aquel saber a enseñar que ha sido adaptado por el profesor según sus propios conocimientos y representación, para ser administrados durante el proceso de enseñanza y organizados en el tiempo. Aquí el profesor quien tiene el rol decisivo, debe adaptar a sus propios conocimientos los objetos a enseñar, insertados en el saber escolar y organizarlos en el tiempo. En este sentido, Henry (1991 citado por Cacho 2005, p. 4) considera que la selección realizada por el profesor para una determinada situación de aprendizaje, tendrá consecuencias sobre la percepción del saber que los estudiantes van a desarrollar y las concepciones que van a formar. Este paso de la transposición didáctica es realizado cotidianamente por el docente. Se podría señalar que este tipo de saber es más autónomo o independiente, ya que cada profesor adapta los contenidos programáticos, lo que trae como consecuencia que los programas no sean respetados, en muchos casos, en su totalidad, en beneficio o no del aprendizaje de los estudiantes.

El trabajo que de un objeto de Saber a Enseñar hace un objeto de enseñanza es lo que es llamado por Chevallard (1991) Transposición Didáctica. Según este autor, los objetos designados como '"a enseñar" no pueden en ningún caso analizarse como simplificaciones de objetos más complejos, provenientes de la sociedad científica o erudita; ellos son por el contrario el resultado de una preparación didáctica de una construcción que los hace diferir cualitativamente. Es un trabajo de construcción del Saber Enseñado a partir del Saber Erudito. Arsac (1992) lo llama la infidelidad del Saber Enseñado al Saber Erudito.

Lo anterior implica que en esta transformación y reformulación del saber, este (el saber) pasa por un proceso de despersonalización (Chevallard, 1991; Johsua y Dupin, 1993; Verret, 1975) y descontextualización, ya que tanto los procesos reales que condujeron a la producción del saber, como el medio epistemológico donde se originó permanecen ocultos, para poder estructurarlos de una manera lógica y coherente en los programas escolares, en los textos, en la preparación de secuencias de aprendizaje, o bien, en la planificación de cursos y prácticas efectivas de los profesores en clase.

Los números decimales en la institución escolar: concepciones asociadas

Se abordará esta sección basándose en el trabajo de Ruiz Higueras (2004), en él se lleva a cabo una reflexión epistemológica sobre las diferentes concepciones que se emplean en la institución escolar para introducir las fracciones y, en consecuencia, los decimales. Esta autora asume la noción de concepción en el sentido de Brousseau (1998): "Las concepciones diferentes de una cierta noción son diferentes en el sentido en que cada una permite más fácilmente ciertas interpretaciones, ciertos cálculos, el reconocimiento de la noción en ciertas circunstancias, mientras que ocurre lo contrario con otras"(p. 35).

Concepción C1: Fracción como operador.

Considerar la fracción como un operador supone que n/p opera sobre una cantidad de una magnitud (o sobre su medida) por medio de un operador que multiplica y otro que divide, así: n/p supone multiplicar por n y dividir entre *p* una determinada cantidad.

En relación con el resultado final, también podría significar, dividir primero entre *p* y, a continuación, multiplicar por *n*, pero, aunque ambos procesos nos conduzcan al mismo resultado, no son idénticos, porque actúan sobre cantidades con medidas diferentes.

En este texto, al indicar cómo el operador permite operar de dos modos diferentes, "porque obtenemos el mismo resultado", se tiende a distraer la atención de las cantidades de magnitudes sobre las que opera, para concentrarse sobre las operaciones mismas y su encadenamiento.

Considerada la fracción como operador, permite dar significación a la multiplicación de fracciones como producto de operadores, eliminando las restricciones que pesaban sobre las fracciones-medida.

Concepción C2: Fracción como cociente exacto

Esta concepción se construye a partir de problemas en los que dada una cantidad cuya medida es ***n u*** debemos dividirla en ***p*** partes. La fracción (n/p) será la medida de cada parte. Las fracciones constituirán un conjunto de "nuevos números" donde la división será posible para todo par de naturales (n, p), de forma que el cociente n/p tenga sentido y, por lo tanto, la ecuación $p.x = n$ tenga solución: $p.x = n \rightarrow x = n/\ p(p \neq 0)$.

La significación de las operaciones con estos "nuevos números" quedará condicionada por el sistema de magnitudes en el que se planteen los problemas.

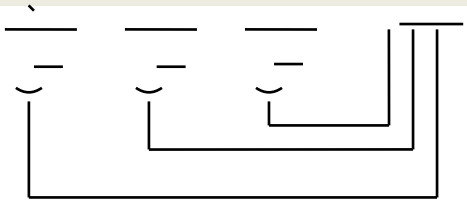
¿Cómo se reparten...?	Dibujo del reparto	¿Qué operación has hecho?	Cada niño/a toca a.... Fracción	Número mixto
Cuatro barras de plastilina entre 3 personas		4:3	$\frac{4}{3}$	$1\frac{1}{3}$

***Gráfico* 1. El reparto como cociente exacto.** Tomado de: Uriondo, citado por Ruiz (2004. p.8).

Si nos restringimos a un dominio intra numérico, las fracciones consideradas como solución a la ecuación $p.x = n(\forall p, n \in N, p \neq 0)$ adquieren el estatus de elementos de nueva estructura algebraica $(Q^+, +, \times)$, es decir, entran a formar parte de un nuevo conjunto numérico que amplía operaciones, y propiedades, permitiendo dar solución a problemas irresolubles en N.

Las **fracciones decimales** serían, bajo esta concepción, las soluciones de la ecuación: $10^n.x = k \rightarrow x = \frac{k}{10^n}, \forall k, n \in N$. Estas nuevas fracciones constituyen el conjunto numérico de los números decimales D^+ al que las propiedades de las operaciones de adición y multiplicación le confieren la estructura de semianillo, conmutativo, íntegro y totalmente ordenado.

Concepción C3: Fraccionamiento de la unidad

El objeto matemático fracción p/q, surge como respuesta a situaciones problemáticas donde es necesario dividir una unidad inicial (“un todo”) en partes que podemos declarar iguales (unidades fraccionarias) y establecer una relación entre el resultado de la partición y las unidades fraccionarias que se toman.

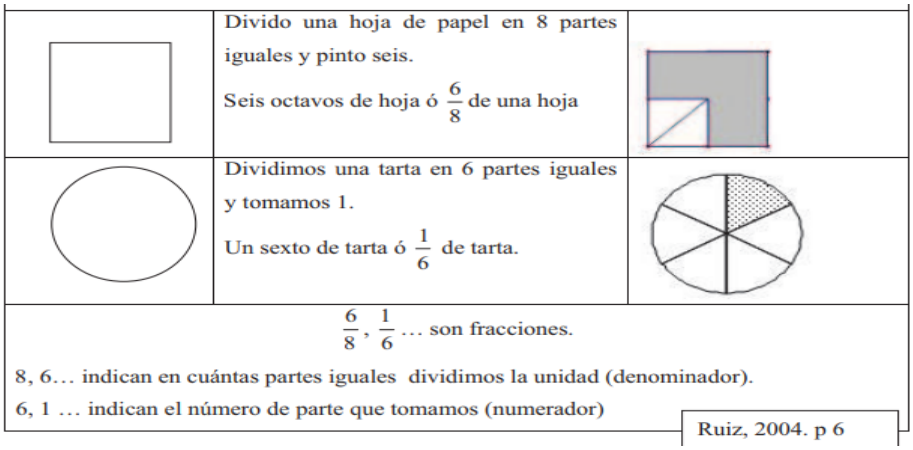


***Gráfico* 2. La fracción desde el fraccionamiento de la Unidad.**
Tomado de Ruiz (2004, p.6)

La fracción, así, se determina de una forma constructiva: en primer lugar dividimos un entero en p partes que podemos declarar iguales, y después tomamos n de estas partes: $\frac{n}{p} = n * \frac{1}{p}$ "n p-avos"

Los "n p-avos" obtenidos son, en realidad, una cantidad de magnitud o bien la medida de dicha cantidad tomando como unidad cada "p-avos". La referencia a la "unidad" de partida hace que quede perturbado el sentido de las fracciones mayores que la unidad.

Los problemas en la enseñanza y el aprendizaje: obstáculos

Brousseau (1998), afirma que los caracteres esenciales que nos permiten identificar, en los comportamientos de los estudiantes, un obstáculo es: Siempre se trata de un conocimiento, no de una ausencia de conocimiento, este conocimiento permite al estudiante producir respuestas correctas en determinados dominios de problemas, engendra respuestas erróneas para ciertos campos de problemas, los errores producidos no son esporádicos sino muy persistentes y resistentes a la corrección.

Tipos de obstáculos

Ontogenéticos: refieren a los procesos de maduración y de las estructuras de conocimiento que posea y pueda desarrollar.

Epistemológicos: refieren a errores que derivan del propio conocimiento matemático, por ejemplo el trasvasado de propiedades de un campo a otro en el que no se cumplen (es clásico el tratar a los racionales como dos naturales y mantener la idea de que entre dos racionales no existe otro u otros, propiedad de densidad de los racionales).

Didácticos: son aquellos que introducen los maestros que no derivan de propiedades del objeto de estudio. Tales como: que el resultado de una división natural es atómico; que dividir achica o es sólo una resta abreviada; que multiplicar agranda o es sólo una

suma abreviada; que las fracciones y los decimales son dos conceptos sin ninguna relación; no introducir el error al realizar mediciones o al trabajar probabilidades; entre otros.

Los números naturales como obstáculo epistemológico para el conocimiento de los números decimales

Los estudiantes, previo a conocer los números decimales han visto y dominan ampliamente el conjunto de los números naturales. Este conocimiento se convierte en un gran obstáculo para ellos debido a que en el conjunto de los números naturales algunas afirmaciones son ciertas, pero cuando los estudiantes los aplican a otros dominios numéricos, como el de las fracciones o los números decimales, les provocan errores persistentes o bien inadaptaciones locales que conllevan pérdidas de sentido (cuadro 1).

Cuadro 1. Los números naturales como obstáculos para el aprendizaje de los decimales

Números naturales	Números racionales (vistos como decimales o fracciones)
Todo número es siempre mayor que su mitad: La mitad de 24 es 12	La mitad de $-\frac{3}{2}$ es $-\frac{3}{4}$ y $-\frac{3}{4} > -\frac{3}{2}$ $\rightarrow$ inadaptación local del cociente de naturales
Sumar dos números significa, ir añadiendo al primero, una a una, todas las unidades que tiene el segundo: 35 más 7 es igual a 42	Sumar: 2347+0.567 $\rightarrow$ inadaptación local del "conteo"
El siguiente de un número es siempre una unidad mayor que él: el siguiente de 3453 es 3454,…	El siguiente inmediato de 1,6 es 1,7 $\rightarrow$ error – "discretización" de D^+
Todo número tiene siguiente inmediato: $235 \rightarrow 236$	El siguiente inmediato de $\frac{3}{5}$ es $\frac{4}{5}$ $\rightarrow$ error – discretización de D^+ y, en particular, de la serie de "los quintos": $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}, \frac{6}{5}$.....
Para multiplicar a x b es necesario sumar a consigo mismo tantas veces como indica b: $7 \times 5 = 7+7+7+7+7$	Multiplicar: $2{,}75 \times 14{,}348 \rightarrow$ inadaptación local del producto de naturales (¿cuántas "veces" repetimos uno de los factores?)
Si se multiplican dos números el producto es mayor que cada uno de los factores.	$0{,}5 \times 28 = 14 \rightarrow$ inadaptación local del producto de naturales: el producto de dos números, en este caso, no es una cantidad mayor, sino menor.

Tomado de Ruiz (2004).

***Cuadro* 1. Los números naturales como obstáculos para el aprendizaje de los decimales (cont.)**

Números naturales	Números racionales (vistos como decimales o fracciones)
Si dividimos un número por otro, el cociente es menor que el dividendo.	$80 \div 0,4 = 200 \rightarrow$ inadaptación local de la división de números naturales: el cociente no es menor que el dividendo, sino mayor.
Dados dos números, si uno se representa con más cifras que otro, el mayor es el que tiene más cifras: 1893>254.	2,47 será menor que 2,275 porque 47 es menor que 275 $\rightarrow$ error- modelo implícito del decimal como dos números naturales separados por una coma y aplicación del orden de los naturales
	Un número decimal: dos naturales separados por una coma $\rightarrow$ error – modelo implícito.
	$0,3 \times 0,3 = 0,9 \rightarrow$ error – modelo implícito del decimal como dos números naturales separados por una coma.

Tomado de Ruiz (2004).

MÉTODO

El interés de esta investigación fue estudiar las nociones de fracciones, decimales y porcentajes que tienen los estudiantes del 7 grado del Liceo Leopoldo Aguerrevere para analizarlas y reacomodarlas de ser necesario. Esta investigación es de tipo cualitativo, apoyada en la observación participativa centrándose en la comprensión por parte de los estudiantes de los contenidos de fracciones y sus diferentes representaciones. Se hicieron registros descriptivos, certificados con fotografías de las actividades aplicadas. La profesora responsable (docente del aula) conoce a los estudiantes lo que permitió una interacción activa en las situaciones propuestas por lo que escogió el modelo interactivo para "producir cambios en la realidad educativa con la participación del docente y los estudiantes, ya que ambos son protagonistas de las mejoras de la educación y, en este caso particular, de las actividades de enseñanza que se construyan" (Correa, 2006, p. 13).

Para realizar la investigación primero se produjo una indagación en Internet sobre artículos que trataran de transposición e ingeniería didáctica y el tema de la relación entre las diferentes representaciones del concepto "Número Racional", escogiendo y utilizando para esta propuesta, el análisis de las concepciones y situaciones didácticas presentadas en el trabajo, "La construcción de los decimales. De las fracciones a la

notación decimal", (Ruiz, 2005). Por lo que se diseñaron actividades para los estudiantes determinando un proceso de enseñanza y de aprendizaje valorable, significativo y continuo para ellos, con la intencionalidad de que evaluaran y reconstruyeran de ser necesario, sus conocimientos previos para alcanzar los conceptos necesarios.

Participantes de la Investigación

Los informantes clave fueron 28 estudiantes (11 varones y 17 hembras) del 7 grado grado del Liceo Leopoldo Aguerrevere correspondiente all año escolar 2004-2005, correspondientes al 12,82% de la población. El promedio de notas en el I lapso fue 13,4 puntos.

Diseño por sesión

Se siguió el esquema de Callejo (1992), para la organización de la propuesta de solución del problema educativo en cuanto a:

• Los objetivos: si se han alcanzado y han podido ser evaluados.

• Contenidos: si la forma como han sido presentados, en relación con el nivel de maduración de los estudiantes, su contexto social, intereses y motivaciones son los adecuados.

• Material utilizado: si su naturaleza y presentación es conveniente y preciso.

• Las actividades y tiempo asignado: ¿han sido ajustados y suficientes?

• La organización de los estudiantes: distribución en el espacio.

• Para la validación de la Propuesta Didáctica, se aplicó la misma y se registraron las observaciones percibidas por el docente en cada sesión.

Análisis por sesión

El análisis por sesión se realiza con la aplicación de la escala (Cuadro 1, 2). Es de acotar que en forma general se podría decir que el niño ve por primera vez la palabra fracción en tercer grado, en cuarto grado conoce los números decimales. Proporcionalidad y porcentaje los estudian en quinto grado. Sin embargo, es en 7º grado donde hacen la relación entre este tipo de números con el conjunto de los números racionales, es decir, relacionan las diferentes formas de representarlos.

Cuadro 2. Escala de Consolidación de aprendizajes

	Escasa consolidación 1	Aprendizaje medio 2	Buen aprendizaje 3	Excelencia en el aprendizaje 4
Trabajo en grupo se ha desarrollado	de forma escasamente participativa	con un inadecuado reparto de funciones.	con un reparto adecuado de funciones, pero sin suficiente resultados en común	cooperativamente, repartiendo de forma equilibrada las funciones y tareas
Presentación de la tarea final	Poco ajuste de las condiciones técnicas previstas.	Tareas elaboradas de forma ocasional desde el punto de vista técnico	Ejecución correcta de la tarea final	Ejecución técnicamente muy lograda de la tarea final
Conclusiones	Apenas ha habido conclusiones originales	Las conclusiones no han sido consensuadas, ni producto del trabajo	Todos participaron en la elaboración de las conclusiones y en la presentación, pero no suficientemente	Todos participaron en la elaboración de las conclusiones y su presentación, siendo originales, y producto del aprendizaje
Clima de trabajo	No ha habido intercambio de información y puesta en común entre los grupos	La puesta en común ha resultado significativamente insuficiente	La puesta en común ha sido algo insuficiente. El clima de trabajo en los grupos ha sido adecuado.	El clima de trabajo de los grupos y en las actividades comunes ha sido el más adecuado.
Elaboración de las tareas	Nulo o escaso	Insuficiente grado de elaboración	Lo realizado se ha ajustado a lo solicitado. Con escasa creatividad	Las tareas realizadas han sido interesantes y originales

Tomado de: Transacos (s/f).

Cuadro 3. Escala de estimación

	Escasa consolidación	Aprendizaje medio	Buen aprendizaje	Excelencia en el aprendizaje
PUNTUACIÓN	5-9	10-14	15-19	20

Estructura de la Propuesta Didáctica

El día a día nos lleva a realizar cálculos de manera automática. El joven desde muy temprana edad maneja, conoce, trabaja y practica con expresiones como 1/2 kilo de café; 25% de descuento en un tienda de ropa; 1,35 metros de altura, etc. A pesar de esto, las fracciones, el producto y cociente entre decimales y el cálculo del porcentaje de alguna expresión son sencillamente un dolor de cabeza para ellos.

En el desarrollo de esta unidad didáctica, se tienen estudiantes que han visto previamente cada uno de los conceptos mencionados, con la única salvedad que no reconocen estas expresiones como números racionales, sino que los consideran entes apartes, es decir, símbolos numéricos que representan cantidades diferentes y que no pueden relacionarse entre sí.

Con base en las concepciones y situaciones-problemas que permiten construir números decimales, del trabajo de Ruiz (2005), se seleccionaron las que mantenían correspondencia con el programa oficial venezolano. Por tanto, la propuesta queda definida de la siguiente manera:

• La propuesta didáctica se dividió en: (a) Una sesión diagnóstica, (b) cuatro sesiones de clase teórico-prácticas y (c) una sesión de resolución de problemas redactados por los estudiantes, la cual fue tomada como evaluación final de la propuesta.

• El desarrollo de la propuesta permitió darle la oportunidad al estudiante de manipular y desglosar los diversos elementos para crear, usando sus conocimientos

previos, enmarcando las situaciones problemáticas, en muchos casos cotidianas para ellos, en un contexto real vinculandose con su entorno, en busca de desarrollar motivaciones para que el aprendizaje fuese significativo para ellos. La actividad principal de cada sesión fue la discusión abierta.

• Se buscó que los estudiantes no sólo desarrollarán confianza en sí mismos sino además que se preparan o, al menos, se preocuparán por prepararse para cada discusión. Para lograr todo esto previo a la creación de la propuesta didáctica (Modelo de aprendizaje), se realizó un análisis del aprendizaje de los estudiantes (Situaciones problema). Para esto se planificaron en clase una serie de actividades que generaron una acertada secuencia para someter a juicio los conocimientos que traían de primaria sobre fracciones y decimales (Actividad diagnóstica).

Sesiones

1.- Prueba diagnóstica: revisión de conocimientos previos.

2.-Un paseo por la historia: Manejo del desarrollo concepto de las fracciones, decimales y porcentajes.

3.-Fracciones: abordaje de las fracciones en diferentes concepciones: sentidos-representaciones, comparación-ordenación y resolución de problemas.

4.- De la fracción al número decimal y del número decimal a la fracción: Definición de números decimales. Diferentes contextos, sentidos y representaciones. Situaciones de enseñanza-aprendizaje que permiten dar significación a los números decimales y a las operaciones entre ellos. Modificación de los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división con números naturales para extenderlos a las operaciones con números decimales. Resolución de problemas.

5.-Porcentaje, decimales y fracciones. Diversas representaciones: Porcentajes y su relación con las fracciones y decimales. Resolución de problemas. Análisis de errores y obstáculos ligados a la simbolización, ordenación, operaciones, etc. de fracciones y números decimales. Causas y vías de superación de obstáculos.

6.-Actividades redactadas por los estudiantes: Evaluación final.

Tiempo de ejecución

Se planteó realizar la unidad didáctica en un estimado de 6 clases o (3 semanas) donde se le dedicó el tiempo necesario y requerido para hacer el estudio minucioso de cada actividad con su discusión y evaluación respectiva.

Objetivos

1. Identificar elementos del conjunto de los números racionales (Q)
2. Aplicar las relaciones de orden “menor que “y “mayor que “en Q
3. Determinar la expresión decimal de un número racional.
4. Representar sobre una recta, expresiones decimales de números racionales.

Contenidos a estudiar

Procedimentales*:* (1) Hallar fracciones equivalentes. (2) Resolver problemas de aplicación del concepto de fracción y operaciones. (3) Hallar las expresiones equivalentes entre fracciones, decimales, porcentajes y representación gráfica.

Conceptuales: Fracciones, decimales, porcentajes, relación de orden.

Actitudinales*:* (1) Valora la importancia que poseen las diferentes representaciones de los números racionales, para resolver situaciones presentes en su entorno. (2) Acepta la necesidad de representar los números racionales en sus diferentes expresiones. (3)

Disfruta las situaciones problemáticas redactadas en grupo. (4) Disfruta las discusiones planteadas en el aula de clase.

Conocimientos previos necesarios

El estudiante desde el 3° grado de primaria estudia los conceptos, propiedades, operaciones y aplicaciones de las fracciones, decimales y porcentajes. Sin embargo, los ve como entes separados, ya que el programa oficial del Ministerio de Educación y los textos escolares actuales lo describen de esa manera. Por ello el interés de esta investigación en estudiar las nociones de fracciones, decimales y porcentajes que tienen los estudiantes para analizarlas y reacomodarlas de ser necesario.

Actividades

Se dividió el curso en grupos de 4 personas, para todas las sesiones. Cada estudiante cumplió con alguna de las siguientes misiones: (a) Expositor: Persona que expuso en la pizarra el resultado a una situación problemática planteada. (b) Vocal: Expuso las conclusiones a la que llegó el grupo. (c) Secretario: Elaboró y entregó el informe de cada sesión y la evaluación del grupo. (d) Defensor: Sólo en caso de que algún otro grupo difiera de los resultados o conclusiones expuestas por ellos, él asumió la defensa de estas.

Evaluación

Se realizó una prueba diagnóstica para verificar el nivel de los conocimientos de los estudiantes. La evaluación de las sesiones se manejó con una escala de estimación (coevaluación y autoevaluación), del libro de Giménez (1997) “Una integración de perspectiva” y del trabajo de Trasancos (s/f) con la tabla de consolidación del aprendizaje, la cual se mostró en en el cuadro 2, y por último una prueba final.

RESULTADOS

El impacto de la propuesta se percibió por medio del cambio de actitud y estilo de aprendizaje de los estudiantes, adicionamos a esto lo comprensible que resultó el proceso de los temas tratados, logrando una modificación en el carácter tradicional y reproductivo del conocimiento.

Los estudiantes presentaron cambios en diferentes aspectos, entre ellos:

- Incremento de notas parciales en el área de matemáticas.

- Mayor participación en el aula.

- Actitud positiva hacia el aprendizaje de nuevos temas.

- Valoración de la importancia de manejar los temas de fracciones, números decimales y porcentajes en la vida diaria.

- El trabajo en grupo ayudó a la superación en otras asignaturas.

- Siendo el objetivo principal de esta investigación diseñar una propuesta didáctica, se juzgó pertinente analizar los resultados en varios puntos: la prueba diagnóstica, las sesiones, la actividad final y la actuación del docente como ente participativo del proceso.

Según Giménez (1997), las funciones de la evaluación son de tipo social, política, pedagógica y profesional. La función social, se refiere a toda la población estudiantil, no sólo a los que tienen problemas, cuyo fin es orientar, ayudar y satisfacer las demandas de los estudiantes. El análisis de la prueba diagnóstica, fue clave para el desarrollo del trabajo de cada sesión. Las respuestas se discutieron con los estudiantes.

En la función política, se encontró una raíz epistemológica que, de acuerdo con Giménez (1997), está presente en el trabajo de algunos filósofos de la ciencia como Bachelard, Popper o Lakatos cuyo objetivo principal se resume en el siguiente argumento:

> El camino hacia el conocimiento está basado en la superación de errores; se conoce siempre por revisión, crítica y mejora de un conocimiento parcial e incompleto. Los errores de los escolares no son deficiencias personales punibles**,** son la manifestación de un proceso constructivo que hay que encauzar y orientar. De ahí que la función ética de la evaluación deba destacar la legitimidad del error como vía de acceso al conocimiento, necesariamente complementada por la crítica y superación del conocimiento deficiente (p. 35).

Con base en las ideas anteriores, la investigadora centra su trabajo en la reconstrucción de los conocimientos, permitiendo que los estudiantes generarán situaciones problemáticas (redacción de problemas por parte de los grupos) para la reconstrucción de los conceptos que poseían, orientándose para encontrar la superación de los obstáculos que se detectaron desde la aplicación de la prueba diagnóstica y que serían analizados más adelante.

En la función pedagógica, la evaluación se centró en una regulación y control del aprendizaje y sus interacciones. Esto quiere decir que se reconocen cambios surgidos en el proceso lo cual generó cambios de estructuras mentales. Entre ellos, la información sobre conocimientos adquiridos, experiencias, razonamientos, creencias y hábitos. Por esta razón, se realiza un seguimiento en las actividades y la valoración del uso del lenguaje apropiado por los estudiantes, concluyendo en la construcción, por su parte, de problemas adaptados al trabajo realizado en las sesiones.

La función profesional brinda, a los docentes, la posibilidad de reflexionar sobre los cambios que se realizan en el estudiante y en él mismo. La evaluación no sólo debe verse como mero proceso de calificar, sino como un indicador de los aprendizajes logrados. Por ello, es fundamental la misión de control y juicio del propio sistema evaluador. De ahí que, para poder realizar un juicio sobre la evaluación, se debe

observar y analizar si esta es viable (si se adecúa a sus intereses y a los sujetos que están implicados), útil (la promoción y el control de progresos), propia y precisa.

Lo anterior permitió emplear ciertos controles al trabajo de los estudiantes por lo que se aplicó la escala de consolidación del aprendizaje del trabajo de Transaco (s/f), (Cuadro 2). Al concluir cada sesión el docente conversaba con el defensor de cada grupo para intercambiar opiniones sobre la misma. Esto permitía conocer las conclusiones de cada grupo por sesión al tiempo de las sugerencias y opiniones.

En cuanto a la prueba diagnóstica

La estructura de la prueba fue tomada de la unidad didáctica "Fracciones, Decimales y Porcentajes" de Jordán (2006), ya que se adapta perfectamente a la necesidad de diagnosticar qué noción poseían los estudiantes sobre los temas a trabajar. Se puede decir que la prueba logró impulsar en los estudiantes la idea de reconstrucción de conocimientos, esto debido a que, el resultado obtenido en la misma superó lo que se esperaba, incluso por ellos mismos, los cuales argumentaban antes de la aplicación que no sabían mucho sobre fracciones, por lo que saldrían muy mal en esta evaluación.

Esta prueba contó con 11 preguntas generales, las cuales se subdividieron en 31 ítems a resolver. Se analizaron cada uno por separado. El gráfico muestra que los estudiantes poseen una base de nivel bajo-aceptable en cuanto a conocimientos básicos se refiere en el tema de fracciones, decimales y porcentajes.

El mayor problema se encontró en los temas relacionados con fracción como operador, fracciones equivalentes, orden, operaciones básicas, representada en las barras rojas.

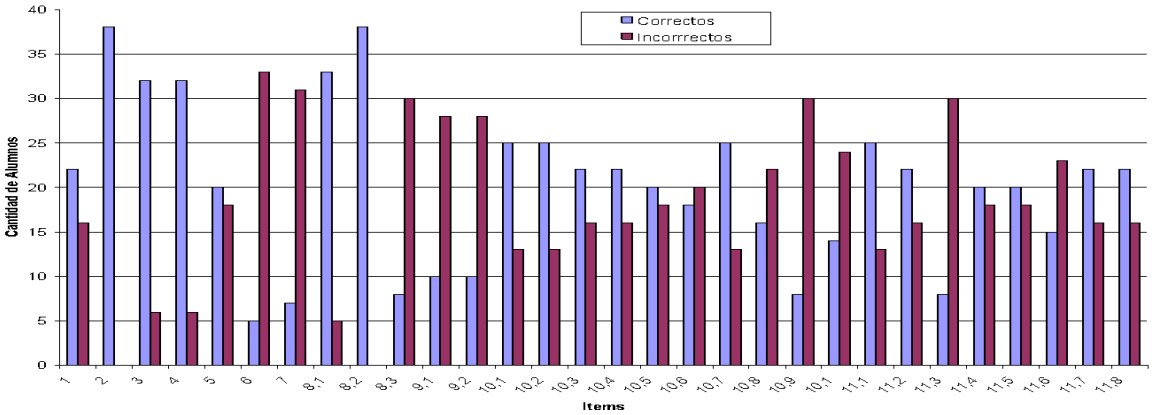


***Gráfico* 3. Resultados de la Prueba Diagnóstica.**

En cuanto a las actividades

Las actividades que se expusieron en la propuesta didáctica se orientaron a la búsqueda de conflictos conceptuales que tenían los estudiantes, respecto a los conocimientos previos que poseían y la generación de nuevos aprendizajes.

Resulta fundamental que, en función de los objetivos establecidos y los contenidos a desarrollar, el profesor establezca una serie de actividades como parte del proceso instruccional. Casanova (1997) señala que, estas actividades deben permitir, lógicamente, la evaluación del proceso de aprendizaje y de los resultados alcanzados. Por lo tanto, los trabajos de los estudiantes constituyen una fuente de datos insustituible para disponer de información precisa de la evaluación. (p.145).

De otro modo, también pueden servir para evaluar cómo y qué aprende el estudiante, dónde están los errores y cuáles son las dificultades que encuentra en su proceso de aprendizaje (cuadro 4).

En cuanto a la prueba final

La evaluación final se realizó luego de discutir y escoger algunos problemas redactados por los grupos, en este caso la evaluación fue grupal y cada grupo redactor

defendería y explicaría la solución de su problema. Es necesario acotar, que aunque se presentaron dificultades con las representaciones geométricas se tomó en cuenta el proceso por el cual los grupos de estudiantes pasaron para encontrar la solución. Siempre se mostraron proactivos y creativos encontrando soluciones innovadoras a problemas cotidianos.

Cuadro 4. Análisis de respuestas obtenidas en las actividades

Actividad 1. Sesión I. Un poco de historia: Las fracciones; Números decimales; Lectura de la fábula: La herencia de los camellos.	En esta actividad los diferentes grupos de estudiantes debían leer junto con el docente los fragmentos de historia sobre el origen de las fracciones y los decimales y posteriormente leer y discutir sobre la fábula de la herencia de los camellos. En cuanto a las interrogantes presentadas a ellos, se puede extraer entre las más interesantes las siguientes: "*Las lecturas son chévere pero me sorprende como ese señor (Beremis) pudo darse cuenta que con sumarle un camello más, él se quedaría con uno"; "Pero claro si se suman 1/2, 1/3 y 1/9no da la unidad, que debía ser el total de los camellos, por eso no lo resolvían"*
Actividad 3. Sesión II. Graduación de una regla.	Lo que se quería lograr con esta actividad es que el estudiante llegara al concepto conmensuración, situación que se logró efectivamente. Aunque produjo muc controversia entre los integrantes de los diferentes grupos al momento de la plena cuando se daban las explicaciones por grupo, como las siguientes: *"Sólo teníamos que repetir las tiras de papel tantas veces hasta que choquen, por eso nos dio una fracción" "Si buscábamos el mínimo común múltiplo entre las dos medidas también da, porque la franja grande mide 20cm y la pequeña 6cm, así que si unimos 3 franjas grandes y 10 pequeñas nos queda la misma medida en ambas por lo que nos quedaba que la grande es 10/3 de la pequeña"*
Actividad 11. Sesión IV. Diferentes representaciones de los números racionales.	En estas actividades se esperaba que el estudiante estuviera en capacidad de indicar luego de la explicación del docente las diferentes representaciones del concepto "Número Racional", Exponiendo juicios como: *"Si estamos bien con esto podemos hacer problemas "más interesantes, con más cositas de esas que le gustan a la profe"".* *"Se debería dar esto así en primaria y no llegamos tan mal al liceo".*

En cuanto a la actuación del docente y la propuesta didáctica, por parte de los estudiantes

El instrumento aplicado a los estudiantes fue tomado del trabajo de Correa (2006), con el fin de evaluar el proceso de aprendizaje y reconstrucción de conocimientos, condiciones y acciones realizadas por la investigadora (docente del aula) y, por último, la influencia que tuvo esta estrategia de enseñanza en los estudiantes. Es importante destacar que el objetivo primordial de esta propuesta buscó aportar una herramienta didáctica a los docentes en ejercicio. A continuación, se muestran los resultados del instrumento aplicado (cuadro 5).

***Cuadro* 5. Evaluación de la propuesta por parte de los estudiantes**

	OPINIÓN
OBJETIVOS	El 92% de los estudiantes opinaron que eran apropiados los objetivos expuestos en la propuesta didáctica
SESIONES	El 100% opinó que todas las sesiones les gustaron, sin embargo, un 12% manifestó que les costó más la sesión sobre la fábula de los camellos. Además, que el profesor y sus compañeros ayudaron en las sesiones, dentro de los comentarios hechos tenemos: *"los ejercicios nos parecieron complejos aunque fácil con la ayuda de la profesora pudimos resolver los problemas que trataban de fracciones y lógica. Que fino concluimos con ecuaciones y descomposición"* El 95% opinó que les había parecido divertidas y agradables El 82% de los estudiantes señalaron que la sesión sobre fracciones (sesión 2) por lo diverso de los problemas, otro 10% indicó que la última sesión por haber tomado en cuenta sus problemas y el 8% argumentó que la sesión de porcentajes, porque combinaron todo lo visto en las sesiones.
REPRESENTACIÓN GRÁFICA	El 11% dijo que el representar gráficamente fracciones impropias, ha sido el contenido que no logran superar completamente. El 93% dijo que no faltaba nada, mientras el 7% precisó que las operaciones con fracciones deberían ser vistas bajo la misma visión.

Al comparar los resultados entre la prueba diagnóstica y la evaluación final se tiene que los estudiantes lograron reestructurar sus conocimientos, comprendieron la representación de las fracciones decimales y porcentajes como formas diferentes de representar un mismo concepto, que además se encuentra en su cotidianidad, cambiaron de actitud y aptitud hacia las matemáticas lo cual redundó en beneficio académico. Es importante destacar que a partir de esta investigación, se creó el plan de preparadores matemáticos siendo éstos estudiantes los fundadores, lo cual los convirtió en apoyo y orientadores de los compañeros de grados inferiores que presentaban dificultades en temas diversos de matemática.

CONCLUSIONES

En función del objetivo planteado en esta investigación se presentan las siguientes conclusiones en 6 aspectos fundamentales:

1.- Obstáculos epistemológicos detectados a través del análisis de los errores y producciones de los estudiantes:

• Se constata que, para los estudiantes de 7º grado, el conjunto de los números naturales, con sus propiedades (estructura, discretización, orden) y operaciones (suma, resta, multiplicación, división), se constituye en un fuerte obstáculo epistemológico para el conjunto de los números decimales y las fracciones, en general, ya que en este último dominio les provoca errores repetitivos y persistentes en relación con: operaciones entre fracciones, orden, conversión de fracciones en decimales, ubicación de fracciones y decimales en la recta real, etc. según se ha constatado en los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba diagnóstica.

• La medición de cantidades de longitud utilizando el sistema métrico decimal **s**e constituye en un obstáculo epistemológico para interpretar geométricamente las tareas de graduación (como aplicación del teorema de Thales) de diferentes cantidades de longitud, ya que los estudiantes la única estrategia que llevan a cabo para graduar una banda es aritmética.

• La graduación no es, en general, objeto de enseñanza ya que no figura en el currículum matemático escolar. Sin embargo, las tareas de graduación de un instrumento de medida no son ni banales ni evidentes, requieren poner en funcionamiento propiedades de la medida: aditividad, invariancia por traslación, entre otros.

2.- Obstáculos didácticos detectados a través del análisis de las producciones de los estudiantes. La presentación de la noción de fracción bajo la concepción *fraccionamiento de la unidad* que realizan los manuales escolares y los docentes en las aulas, por medio de figuras geométricas (círculos y polígonos regulares: rectángulos, pentágonos, hexágonos) divididas en partes iguales se constituye en un fuerte obstáculo didáctico, puesto que pone en evidencia un fuerte fenómeno de *naturalización* del problema de “dividir una cantidad de una magnitud continua en k partes iguales”, contribuyendo a que los estudiantes consideren que es sumamente trivial hacer cualquier fraccionamiento de una unidad: basta con trazar “a mano alzada” unas

particiones más o menos homogéneas sobre un polígono regular sobre el papel. Esto provoca en los estudiantes un fenómeno de *transparencia epistemológica*.

El fenómeno de *transparencia epistemológica* detectado en los estudiantes tiene su origen en el proceso de transposición didáctica realizado por manuales escolares y por los docentes en el aula, ya que consideran las unidades de la magnitud superficie que se deben fraccionar como figuras geométricas "perfectas" (círculos y polígonos regulares), mostrando que no existe el menor problema en fraccionarlos en cuántas partes iguales queramos, contribuyendo de este modo a construir de un modo sumamente reduccionista el "saber enseñado", lo que implicaría que el "saber del estudiante" configure también de un modo muy condicionado la matematización de la realidad.

3.- **La construcción escolar de las fracciones y los decimales:** Se ha constatado que la construcción de los números decimales y las fracciones en situación escolar es muy compleja, ya que existen diversas concepciones que es necesario articular con sentido y funcionalidad, teniendo en cuenta las dificultades ligadas a las restricciones de cada una de las magnitudes donde "viven" estos objetos matemáticos.

4.- Prueba diagnóstica. Tanto la prueba diagnóstica como la progresión de actividades que gestionó la profesora en el aula han conseguido poner de manifiesto las dificultades y errores que tienen los estudiantes en este dominio y los fenómenos didácticos y obstáculos ligados a la transposición didáctica.

5.- El proceso de autoformación de los estudiantes La autogeneración de conocimiento no siempre puede adaptarse a los temas en matemática, sin embargo, es válido reforzar en los estudiantes la idea de autoformación, en este trabajo se le dio la oportunidad a los estudiantes para que ellos mismos, redactaron, expusieron y defendieron actividades y problemas matemáticos.

6.-**La actitud de los estudiantes hacia la matemática.** La docente del curso evidenció el efecto positivo en los resultados finales de la aplicación, la actitud de los estudiantes hacia la matemática cambió radicalmente, lograban aplicar los contenidos matemáticos en su vida cotidiana, este cambio fue tanto desde el punto de vista cualitativo como cuantitativo. Para el momento de redactar estas conclusiones los estudiantes fundaron el club de preparadores de matemática (ahora de ciencias naturales y matemáticas), siendo esto de importancia relevante para todos aquellos creyentes de la aplicabilidad de la didáctica de la matemática.

REFERENCIAS

Arsac, G. (1992). L'Evolution d'une théorie en didactique: L'exemple de la transposition didactique. *Recherche en didactique de mathématiques.*12(1)

Artigue M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gomez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México. Grupo Editorial Iberoamérica. (pp. 33 - 61)

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques*, vol 7, 2, P. 33-115. (Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Traducción de Dilma Fregona y Facundo Ortega). Argentina

Brousseau, G. (1998). Teoría de situaciones didácticas. (Página Web) Traducción de Dilma Fregona y Facundo Ortega). Argentina.

Cacho Alfaro M., (2005). Revista de la Red de Postgrados en Educación N° 2, enero-junio de 2005. p 1-22

Callejo de la Vega, M. L. (1992 Orientaciones para la elaboración de Unidades Didácticas: Área de Matemática. IEPS

Cantoral R. y Farfán R. (1998). *Investigación en Didáctica de la Matemática y profesionalización docente: Retos de la Educación Superior.* Serie Anotologías, 3. Área de Educación Superior. Depto. de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México. (pp. 47 - 104)

Chevallard, Y. (1991). *La Transposición didáctica: Del Saber Sabio Al Saber Enseñado.* Traducción: Claudia Gilman. Aique Grupo Editor S.A. Argentina

Johsua, M.A. Dupin (1993). "Un exemple d´analyse de la transposition didactique - La notion de distance". *Recherche en didactique des mathématiques*. 3.2., 157-239

Casanova, A. (1997). La enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato y primer curso de la Universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. *Actas del IV Simposio de la SEIEM.* España: Huelva

Correa R, C. (2006). Una propuesta de enseñanza bajo dos concepciones de la geometría, la sintética y la analítica para las secciones cónicas. Trabajo de grado para optar al título de Especialista en Didáctica de Matemática. USB. (pp. 13-16)

Farfán, R. (2001). *Tradiciones y paradigmas de Investigación en Matemática Educativa.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 14. Panamá. (pp. 131 – 140)

Giménez Rodríguez, J. (1997). Evaluación en Matemática. Una integración de perspectiva. Editorial Síntesis Madrid España

Godino J.D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14, nº 3. (pp. 325-355)

Johsua, S. et Dupin J-J (1993). *Introduction à la didactique des science et des mathématiques*. Presses Universitaires de France

Jordán Martín, S. (2006). Unidad Didáctica "Fracciones, Decimales y Porcentajes". Dirección general de coordinación y desarrollo normativo. Curso 2006-2007. pp 7-9.

Juárez Camacho M. C, Cruz Ruíz C. Resignificación de la razón trigonométrica con estudiantes de la facultad de ingeniería UNACCH. *Núm 46, Diciembre 2019. revistapakbal_46_pag23-29. pdf*

Schoenfeld, A. (2000). Propósitos y métodos de investigación en Educación Matemática. *Notices of the AMS.* Volume 47, Number 6. Traducción Juan D. Godino

Ruiz Higueras, L. (2004) La construcción de los números decimales en la escuela Primaria: de las fracciones a la notación decimal. En Chamorro, M.C. (Ed*) Números, formas y volúmenes en el entorno del niño*, p. 189- 233. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia

Ruiz Higueras, L. (2005) *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén

Rodríguez Fernández J. L, Ruiz Higueras L. La transparencia de los hechos didácticos en la enseñanza de las matemáticas. Suma: *Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, ISSN 1130-488X, Nº 32, 1999, p.p. 69-78

Ministerio de educación del reinado de España. (2007). Página Web en línea. Disponible: http://descartes.cnice.mecd.es/matirales_didacticos/Fracciones_decimales_porcentaje/Fracciones_4htm. Consultado: 2007, diciembre 16