

LA REPRESENTACIÓN COMO PROCESO EN EL PENSAMIENTO VARIACIONAL: HABILIDADES BÁSICAS Y MEDIACIÓN DIGITAL

Joselín Rivero Pinto
Unidades Tecnológicas de
Santander
Jorivero@correo.uts.edu.co
ID ORCID: 0000-0003-4247-0222

Nelson Javier Rueda Rueda
Unidades Tecnológicas de
Santander
Ne.rueda@correo.uts.edu.co
ID ORCID: 0000-0003-0670-3156

Recibido: 17/10/2023

Aprobado: 25/11/2023

RESUMEN

Las problemáticas asociadas con la enseñanza y el aprendizaje del cálculo son el punto de partida para establecer las habilidades básicas que se requieren para la comprensión del cálculo diferencial. Este artículo tiene como finalidad presentar algunas reflexiones tanto teóricas como metodológicas que surgen del diseño y puesta en marcha de un curso de pre-cálculo dirigido a estudiantes de nuevo ingreso a la universidad, mediado por tecnologías digitales en el que se busca rescatar el movimiento como núcleo conceptual del cálculo. Como resultado de la investigación se plantean cinco habilidades cognitivas básicas que el estudiante debe desarrollar para alcanzar una comprensión conceptual del pensamiento variacional, de cada una de las habilidades se presentan algunos descriptores que permitirán identificar si el estudiante está alcanzando o no dicha habilidad.

Palabras clave: Tecnologías digitales, cálculo diferencial, habilidades cognitivas, pensamiento variacional, representación.

REPRESENTATION AS A PROCESS IN VARIATIONAL THINKING: BASIC SKILLS AND DIGITAL MEDIATION

ABSTRACT

Problems associated with the teaching and learning of calculus are the starting point to establish the basic skills that are required for the understanding of the differential calculus. This article aims to present some theoretical and methodological reflections that arise from the design and implementation of a pre-calculus course aimed at new university students, mediated by digital technologies in which it seeks to rescue the

movement as conceptual core of calculus. As a result of the research, five basic cognitive skills are proposed that the student must develop to achieve a conceptual understanding of variational thinking, for each of the skills some descriptors are presented that will allow identifying whether or not the student is achieving that ability.

Keywords: Digital technologies, differential calculus, cognitive skills, variational thinking, representation.

INTRODUCCIÓN

Al ingresar a las instituciones de Educación Superior un curso de cálculo diferencial se vuelve materia obligada para los estudiantes de las carreras de ingeniería, ciencias e incluso algunas de ciencias sociales, debido a que en dicho curso se realiza un trabajo específico sobre funciones, las cuales son consideradas el modelo matemático por excelencia. A su vez dicho curso se convierte en uno de los que mayores problemáticas presentan al estudiante lo que se ve reflejado en los bajos porcentajes de aprobación, siendo este un fenómeno mundial (Cuevas, 1996; Dávila, Flores, García y Valencia, 2008).

Las causas de dicha problemática tales como los problemas de aprendizaje de la noción de límite y del infinito matemático, la falta de eficiencia de los procesos de visualización y la falta de articulación de las representaciones de los objetos matemáticos; han sido ampliamente reportadas (Hitt y Dufour, 2013).

Además de los causales anteriores podemos considerar que la enseñanza del cálculo se realiza básicamente en tres formas: una, con una introducción semiformal de los números reales, propiedades de sucesiones, series, límites y continuidad; seguido de un enfoque operativo en el que se enfatizan métodos de derivación aplicados a funciones convenientemente diseñadas para tal fin. La segunda es una presentación fundamentalmente operativa y la tercera es un enfoque netamente formal que suele confundirse con el análisis matemático (Cuevas y Madrid, 2013).

Las instituciones de Educación Superior se ven aquejadas por la problemática planteada y deben recurrir a diferentes alternativas en pro de disminuir esos altos porcentajes de reprobación, que desencadenan finalmente en deserción académica. Sin embargo, dichas alternativas no son siempre exitosas pues plantean soluciones

basadas en repastos de contenidos, manejo algorítmico y una fuerte carga operativa, en detrimento de los aspectos conceptuales.

La Universidad Industrial de Santander (UIS) donde se desarrolló esta investigación, ha implementado a lo largo de los últimos trece años diferentes estrategias a fin de atacar la problemática antes descrita. Dentro de esas alternativas en los últimos años se ha realizado un curso no tradicional de pre-cálculo basado en la problematización mediante situaciones contextualizadas de los objetos matemáticos de estudio del cálculo, la exploración de los fenómenos de variación con el apoyo de las tecnologías digitales y la comunicación de estrategias e interpretaciones asociadas a los fenómenos de variación (Fiallo y Parada, 2014).

La investigación que aquí se reporta hace parte de un proyecto que busca caracterizar las habilidades básicas del Pensamiento Variacional que son necesarias para la comprensión del cálculo diferencial y se desarrolla en el marco de un curso de pre-cálculo en la UIS. El curso antes mencionado ha estado dirigido a trescientos estudiantes de nuevo ingreso de las carreras de Ingeniería y Ciencias, los cuales fueron seleccionados para realizar el curso por su bajo puntaje en el área de Matemáticas de las Pruebas Saber 11.

El curso se realiza en 15 sesiones de 4 horas cada una, dichas sesiones se desarrollan mediante las siguientes fases: i) Información y exploración libre; ii) Socialización de resultados; iii) Exploración dirigida; iv) Explicación; y v) Tarea retadora (Fiallo y Parada, 2014)

Como parte de la delimitación del objeto de estudio debemos considerar que tanto los estándares del *National Council of teachers of Mathematics* (NCTM, por sus siglas en inglés) como el Ministerio de Educación Nacional hablan de diversos procesos que hacen parte de la aprehensión de los contenidos en matemáticas: i) Comunicación, ii) Formulación, comparación y ejercitación de procedimientos, iii) Representación, iv) Planteamiento y resolución de problemas y v) Razonamiento.

De estos procesos nos centraremos en particular en el proceso de representación, del cual hablaremos más extensamente en el siguiente apartado.

REFERENTES CONCEPTUALES

¿Qué se entenderá por representación y por proceso de representación?

Debido a la naturaleza semiótica de los objetos matemáticos sólo es posible entrar en contacto con ellos a través de sus representaciones (Moreno, 2014), pero, ¿qué podemos entender por representación?

Diferentes posturas han sido propuestas al respecto, rescatamos a continuación algunos aspectos relevantes de dichas posturas:

Bruner (1966) sugiere que existen principalmente tres maneras por las cuales el ser humano logra traducir su experiencia en un modelo del mundo (lo cual se entenderá como representación): la acción, el uso de los sentidos junto con el uso de imágenes que resuman dicha percepción, y el uso de palabras o símbolos. A partir de estas maneras, plantea diversas modalidades de representación:

i) Representaciones ejecutivas o enactivas, que consisten en el uso del cuerpo para la representación de un evento mediante un acto motriz.

ii) Representaciones icónicas, que son representaciones mediante imágenes abstractas de eventos o situaciones reales.

iii) Representaciones simbólicas, aquellas que se dan únicamente mediante símbolos.

La postura anterior es adaptada y contextualizada por Tall (1996) a las representaciones utilizadas en cálculo (más específicamente a las representaciones de funciones), considerando que las representaciones simbólicas propuestas por Bruner son al mismo tiempo visuales y simbólicas. Así surgen cuatro modalidades de representación:

i) Representaciones enactivas, que identifica como las acciones humanas que dan la sensación de cambio, velocidad o aceleración.

ii) Representaciones numéricas y simbólicas, que son representaciones que pueden ser manipuladas manualmente o con computadora (incluyendo la posibilidad de ser programadas por los estudiantes).

iii) Representaciones visuales, son aquellas que pueden ser producidas manualmente de manera aproximada o, más precisamente, con ordenadores dinámicos.

iv) Representaciones formales, las que dependen de definiciones y pruebas.¹

Otro punto de vista es el expresado por Moreno y Hegedus (2013) quienes consideran que los sistemas de notación han evolucionado debido a nuevas exploraciones matemáticas, que se han hecho posible gracias a mediadores semióticos como lo son los sistemas de geometría dinámica (en general el software matemático, no restringido al software de geometría). Estos mediadores semióticos permiten un nuevo tipo de representación: la digital, que puede categorizarse de la siguiente manera:

i) Representación estática inerte: La inscripción se fusiona con el medio, es decir no es manipulable en ningún sentido

ii) Representación estática kinestésica-estética: esta nueva forma, aunque estática, permite una inscripción más kinestésica-dado que es fácil moverse dentro de los medios de inscripción - y un proceso estético -dado el uso del color para diferenciar entre las notaciones.

iii) Representación estática computacional: las representaciones (por ejemplo, un gráfico trazado) son artefactos de una respuesta computacional a la acción de un ser humano. Los actos intencionales de un ser humano son computacionalmente refinados. El sistema de notación (por ejemplo, fichas matemáticas, gráficos, funciones) se procesa dentro del medio y se presenta como una representación estática de la entrada del usuario o la interacción con el dispositivo.

iv) Representación discreta dinámica: las interacciones de los usuarios se convierten en más fluidas, el medio dentro del cual se pueden expresar notaciones se hace más plástico y maleable. Acciones discretas se traducen en expresiones observables -expresiones que son co-acciones entre el usuario y el medio- y sin embargo el medio sigue siendo dinámico, ya que es maleable, y re-anima notaciones y expresiones de entradas discretas.

v) Representaciones continuas dinámicas: Algunos programas de software permiten al usuario navegar a través de acciones continuas de un ratón y tener la percepción de propiedades de una forma o superficie matemática a través de la reorientación de su perspectiva. Por ejemplo, un usuario podría percibir la inclinación de una superficie a través de un dispositivo *háptico* de retroalimentación y moverlo a un punto de valor extremo sin preguntar al computador como calcular los extremos relativos. (Moreno y Hegedus, 2013)

A partir de estas posturas se harán algunas precisiones sobre lo que en esta investigación se considerará como representación:

Entenderemos por representación a las diferentes expresiones ya sean estas simbólicas (numéricas, simbólicas y formales en términos de Tall (1996)), gráficas o verbales que le permitan al estudiante apropiarse o comunicar su comprensión para sí mismo y para los demás sobre los objetos de estudio del Cálculo diferencial: cambio y variación. Así cuatro tipos de representación en particular serán tomados en cuenta desde el punto de vista formal: algebraica, numérica, gráfica (incluyendo en esta categoría la representación digital) y lenguaje natural.

El contexto donde esta investigación es desarrollada, dado el uso de un mediador semiótico –Geogebra- en los términos en los que lo plantea Moreno (2014) nos lleva a considerar el uso de las representaciones digitales.

Pero más allá de la consideración teórica acerca de lo que es una representación, nos centraremos en lo que la representación como proceso pueda aportar para el desarrollo cognitivo del ser humano.

Al respecto los Estándares curriculares de Matemáticas (MEN, 2006) mencionan que la representación como proceso implica, entre otros aspectos, formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones matemáticas y no matemáticas, lo que además requiere analizar situaciones, mediante modelos mentales que las representen externamente de distintas formas. Explícitamente el MEN expone:

Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista. Es decir dominar con fluidez distintos recursos y

registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos. (2006, p. 51).

De manera similar, es visto el proceso de representación en los estándares del NCTM (2003). Las acciones correspondientes a este proceso son:

- i) Crear y usar representaciones para organizar, registrar, y comunicar ideas matemáticas.
- ii) Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas.
- iii) Usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Por su parte el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA) de la OCDE, establece una serie de capacidades básicas o competencias, de las cuáles destacamos las dos que podemos identificar con el proceso de representación:

Representación. Comporta la capacidad de decodificar, codificar, traducir, interpretar y distinguir distintas formas de representación de objetos y situaciones matemáticas; las interrelaciones que existen entre las diversas representaciones y la elección y alternancia entre distintos tipos de representación según las situaciones y objetivos.

Utilización de operaciones y lenguaje técnico, formal y simbólico. Comporta decodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico; comprender sus relaciones con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico/formal; hacer uso de expresiones y asertos que contengan símbolos y fórmulas; emplear variables. (Murillo, Arnal & Marcos 2012, p. 383)

Teniendo en cuenta estas perspectivas de lo que se entiende como proceso de representación, en particular para los objetivos de esta investigación se interpretará como por proceso de representación:

- i) La creación y uso de representaciones para organizar, registrar, y comunicar ideas matemáticas o para modelizar diferentes fenómenos y situaciones en contextos matemáticos o no matemáticos.
- ii) La decodificación, codificación, traducción, interpretación y distinción de las distintas formas de representación de objetos y situaciones matemáticas.

iii) La descodificación e interpretación de las representaciones algebraicas, numéricas y gráficas y la comprensión de la relación de estas con las representaciones en lenguaje natural.

iv) La elección y transformación de los diferentes tipos de representación según las situaciones planteadas.

¿Qué se entenderá por habilidades y por habilidades cognitivas?

Hablar de habilidad puede suponer desde un punto de vista intuitivo, una aptitud por parte del individuo para ejecutar una tarea, actividad o acción específica. De igual forma se puede relacionar con la capacidad, aunque ésta solamente entendida como una posibilidad del ser humano. Estas percepciones intuitivas han sido estudiadas a profundidad desde el campo de la psicología, siendo este el punto de partida para encontrar diversas apreciaciones de lo que habilidades significan:

“la acción que por la continuidad con la que la repetimos se convierte en una predisposición o hábito.” (Laorden, García y Sánchez, 2005, p.4)

“la capacidad que permite a un objetivo ser alcanzado dentro de un dominio cada vez con mayor probabilidad como resultado de la práctica.” (Rosenbaun, Carlson y Gilmore, 2000, p.454)

“sistema de acciones y operaciones dominado por el sujeto que responde a un objetivo. Es la capacidad adquirida por el hombre, de utilizar creadoramente sus conocimientos y hábitos tanto en el proceso de actividad teórica como práctica.” (Cañedo, 2008, p.21)

Rescatamos de estas definiciones los términos acciones, objetivos, hábitos y práctica, que nos ayudan a delimitar y definir como habilidad al conjunto de acciones secuenciales, coherentes y coordinadas que realiza un individuo en la consecución de un objetivo; acciones que están mediadas por los conocimientos previos y que pueden desarrollarse mediante la práctica.

Ahora bien, inmersos en el campo del conocimiento e interesados por el proceso de adquisición del mismo, será necesario definir las habilidades cognitivas (a diferencia

de otras como las habilidades motoras) para lo cual retomaremos algunas interpretaciones desde el punto de vista de la psicología:

Herrera (2001) define las habilidades cognitivas de la siguiente forma:

Hablar de habilidades cognitivas, aunque sea brevemente, nos remite al ámbito de las aptitudes e implica, en primer lugar, introducirnos en el estudio del pensamiento, como proceso o sistemas de procesos complejos que abarcan desde la captación de estímulos, hasta su almacenaje en memoria y su posterior utilización, en su evolución y su relación con el lenguaje; abordar el estudio de la inteligencia y su evolución, como herramienta básica del pensamiento; y profundizar en el estudio del aprendizaje, como cambio relativamente estable del comportamiento producido por la experiencia.(p. 1)

Esta apreciación de lo que a habilidades cognitivas se refiere es similar a la expresada por Reed (2007) quien sugiere que son las destrezas y procedimientos necesarios para realizar una tarea y que facilitan la adquisición del conocimiento y su posterior recuperación a fin de usos prácticos.

Tomando en cuenta estas perspectivas, la delimitación a la representación como proceso en el contexto de situaciones variacionales, habremos de definir las habilidades cognitivas en términos de acciones que relacionen los objetos matemáticos en un curso de Cálculo Diferencial: funciones, límites y derivadas.

Entenderemos por habilidad cognitiva las operaciones mentales que resultan de la coordinación de acciones tendientes a la consecución de un objetivo ligado a una rama del conocimiento institucionalizado, que podemos llamar saber. De la misma forma consideraremos habilidad cognitiva las acciones que un individuo puede desarrollar para interactuar con un objeto que el mismo puede identificar como objeto de estudio.

2.3 Habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación

A partir de las reflexiones y de las definiciones enunciadas en los apartados anteriores hemos identificado cinco habilidades cognitivas:

1. Identificar, en contextos matemáticos o no matemáticos, comportamientos variacionales.

2. Interpretar diferentes representaciones de los objetos matemáticos en situaciones de comportamiento variacional, en contexto matemático o no matemático.
3. Construir representaciones de los objetos matemáticos involucrados en situaciones de comportamiento variacional.
4. Conectar diferentes representaciones de un objeto matemático en situaciones de comportamiento variacional, en contexto matemático o no matemático.
5. Coordinar simultáneamente representaciones de un objeto matemático en situaciones de comportamiento variacional, en contextos tanto matemáticos como no matemáticos.

METODOLOGÍA

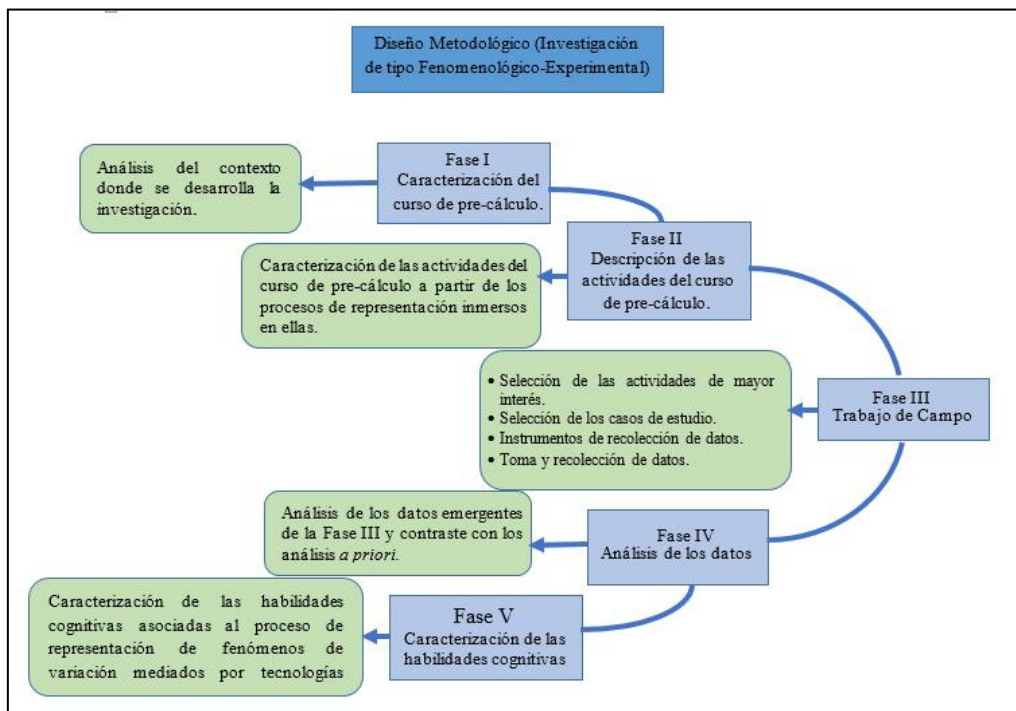
En el presente apartado se describe el diseño metodológico de la investigación que aquí se reporta, la cual es de corte fenomenológico y de tipo experimental. Para el análisis de los datos se empleó una metodología cualitativa que nos permitiera acercarnos de manera más fidedigna a las formas de pensamiento de los estudiantes, a fin de poder caracterizar las habilidades asociadas que son objetivo de esta investigación.

El procedimiento metodológico responde a cinco fases que inician con la caracterización del curso de pre-cálculo en el cual se encuentra inmersa esta investigación y finaliza con la caracterización de las habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación tal como se puede observar en la siguiente figura. A grandes rasgos describimos cada una de las fases:

Fase 1. Caracterización del curso de pre-cálculo

Caracterización del curso de pre-cálculo que realiza la Escuela de Matemáticas, en coordinación con el programa ASAE y el Sistema de Apoyo a la Excelencia Académica. En esta etapa se revisó cada una de las actividades planteadas en cada

sesión del curso de pre-cálculo y se asoció con la habilidad que se considera se puede desarrollar con ésta.



Estructura de la metodología de Investigación

Esta caracterización se realizó en conjunto por varios integrantes del Grupo de Educación Matemática Edumat-UIS, dado que se realizaban a la par distintas investigaciones a partir del curso de pre-cálculo. En particular para esta investigación se esperaba determinar y asociar habilidades del proceso de representación que se podían potenciar con las actividades que se desarrollan dentro del curso.

Fase 2. Descripción de las actividades del curso de pre-cálculo

En esta fase se realizó una descripción de cada una de las actividades que posteriormente se videograbaron en el curso de pre-cálculo. Esta descripción tomó en

cuenta la caracterización realizada en la fase 1 y se enfoca en las habilidades cognitivas a la luz de los referentes conceptuales.

Fase 3. Trabajo de campo

Esta fase constó de la recolección y sistematización de datos desde las siguientes perspectivas: Se videograbó cada una de las sesiones del curso, centrando la atención en algunos estudiantes, de los cuales se recogieron sus producciones escritas, se captaron sus expresiones orales y gestuales que nos podían dar cuenta de sus procesos de representación. Posteriormente se realizó un seguimiento a algunos casos de estudio, para valorar las habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación que posiblemente desarrolló gracias a su participación en el curso de precálculo; a esos casos de estudio al final del proceso se les realizó entrevistas para poder contrastar y complementar hallazgos.

Fase 4. Análisis de datos fase 3

En esta etapa se caracterizaron las habilidades en términos de procesos. Dado que, como se mencionó en el marco conceptual, las habilidades serían descritas a partir de acciones o conjuntos de acciones, fue necesario contrastar aquellas consideradas a la luz de la teoría y de los análisis realizados en la fase 2 con aquellas que surgieron de los datos recolectados en la fase 3. Dicho contraste y caracterización facilitaron el desarrollo de la fase 5 donde se pretendía enfocar en habilidades cognitivas referidas a un proceso específico: el proceso de representación.

Fase 5. Caracterización de habilidades cognitivas

Caracterización de habilidades cognitivas asociadas a procesos de representación de fenómenos de variación que pueden potenciarse mediante la resolución de problemas mediados por tecnologías digitales, en un curso de pre-cálculo con estudiantes de nuevo ingreso a la Universidad Industrial de Santander.

PRESENTACIÓN DE ALGUNOS RESULTADOS

En el presente artículo se presentan algunos resultados encontrados en la investigación, en particular mostramos aquellos relacionados con la habilidad cognitiva de Construcción de las representaciones de los objetos matemáticos:

De las reflexiones realizadas en los referentes conceptuales, podemos considerar que las acciones que nos describen la habilidad para construir representaciones de los objetos matemáticos son aquellas donde se genera una nueva representación de dicho objeto (nueva en términos de que no se encuentre dada para el estudiante en dicha actividad) aun cuando dicha representación no presente todas las características correctas de dicha representación en el registro en que se muestra.

Para el caso de la construcción de gráficas podemos considerar que la construcción de representaciones pasa por la selección y etiquetado de los ejes, la selección de la escala, la identificación de la unidad y el trazado. Es decir, se tienen en cuenta características de objetos “paramatemáticos” en los términos mencionados por Chevallard (1991).

Tomamos como primer ejemplo de acciones de este tipo las realizadas por los estudiantes caso de estudio para responder a una actividad del Taller Transformación de funciones

– En tu hoja de trabajo representa gráficamente la función $= \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 4$

En dicha actividad se les solicita a los estudiantes obtener una representación gráfica de la función a partir de la representación algebraica de la misma. Observamos a continuación lo realizado por los estudiantes:

11 Representar: $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$

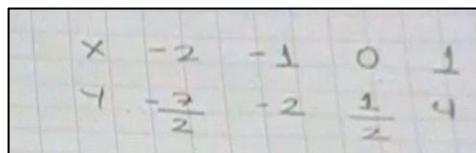
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	-3.5	-2	0.5	4	8.5	14

Construcción de una representación tabular de la función dada (Jhoan y Sebastián)

En la Figura mostrada los estudiantes Jhoan y Sebastián construyen una representación tabular para la función que les ha sido presentada en el registro algebraico, aun cuando su objetivo final es obtener una representación gráfica de la función.

Podemos observar que para realizar esta construcción los estudiantes han elegido valores enteros que se encuentran alrededor del cero, lo cual es una situación muy común dado el estilo de enseñanza recibido. Por lo general la graficación de funciones se realiza a partir de sustituir una cantidad de valores para una expresión algebraica dada, a fin de obtener una representación tabular de la misma (Hitt, 2005)

De igual forma como ha sido iniciada la actividad por Jhoan y Sebastián, Jessica y Ximena utilizan valores enteros cercanos al cero (tanto negativos como positivos) para construir una representación tabular de la expresión algebraica que les fue dada inicialmente.

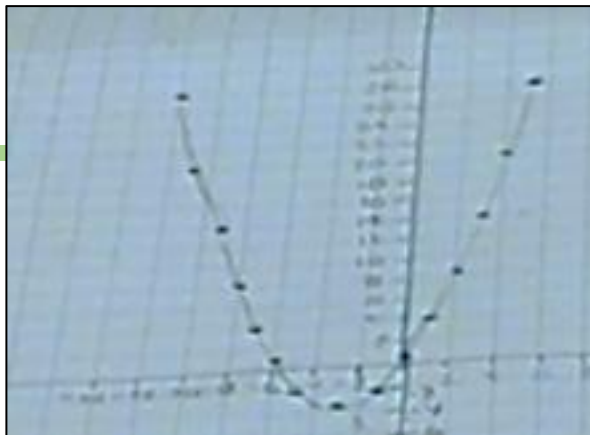


x	-2	-1	0	1
y	$-\frac{3}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	4

Construcción de una representación tabular de la función dada (Jessica y Ximena)

Las actividades de construcción realizadas por las dos parejas casos de estudio reflejan un comportamiento automático como el ya mencionado antes, donde no se realiza siquiera un análisis de la función a graficar, sino que enseguida se escogen valores (enteros y cercanos al cero) y se utiliza el reemplazo para construir una representación en el registro tabular. Aunque la actividad de construcción de la representación tabular está automatizada y en términos generales se realiza de forma eficiente, salvo algunas excepciones por errores de cálculo, este automatismo puede generar, como lo menciona Hitt (2005), dos tipos de conflictos: la falta de visión global sobre el comportamiento de las funciones y la concepción de función como función continua.

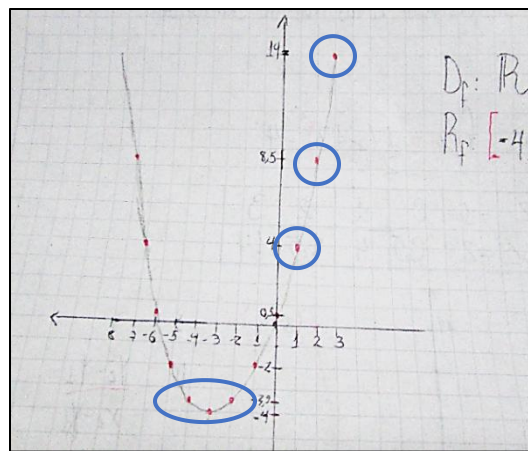
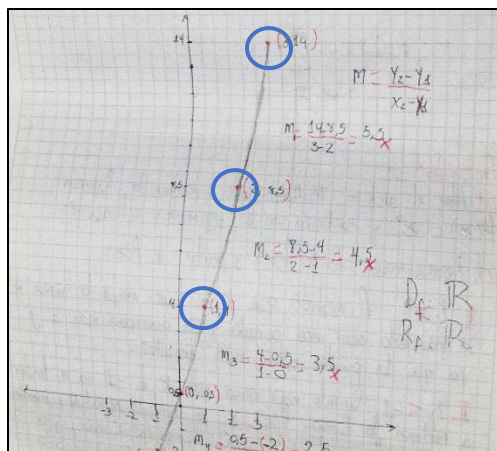
Una vez que los estudiantes han construido la representación tabular de la función dada proceden a construir la representación gráfica de la misma como podemos observar en la siguiente figura:



Construcción de la representación gráfica de la función dada (Jessica y Ximena)

De nuevo la tarea de construcción parece estar automatizada y estar siendo realizada con éxito (no estamos considerando si la construcción de la representación tabular fue exitosa del todo o presenta errores). Sin embargo, este método de graficación tradicional: “ha considerado como secundario lo variacional y privilegiado el trazado del dibujo de la gráfica de la función a partir de ubicar un conjunto discreto de puntos” (Dolores y Salgado, 2009, p.72).

Se hace evidente cómo lo que más se resalta de la representación gráfica construida son los puntos que se han obtenido a partir de la representación tabular, como sucede de igual manera en las dos gráficas siguientes:



La obtención de la curva que se encuentra entre dos puntos obedece de nuevo a reglas automatizadas pues de ninguna forma se analiza el comportamiento de la función en el intervalo entre los dos puntos graficados inicialmente. Dolores (2004) menciona que los estudiantes por lo general tratan con las funciones de forma puntual, es decir trazan y leen puntos pero no analizan el comportamiento global de la función o en intervalos definidos.

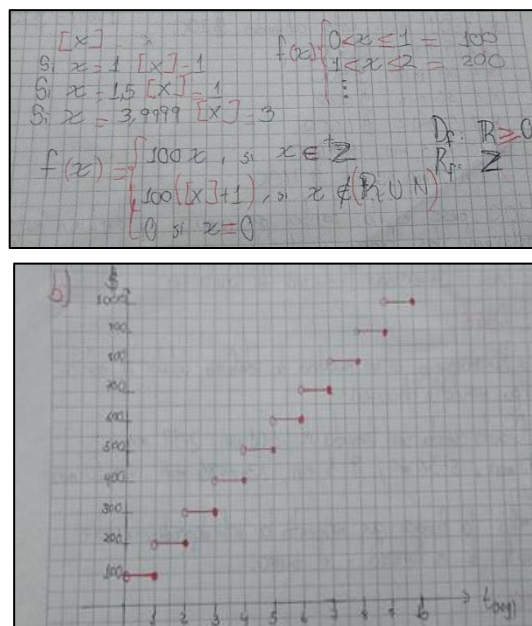
Ahora bien, cabe destacar que en el proceso de construcción de la representación gráfica los objetos paramatemáticos han sido correctamente escogidos y utilizados, no existe problema con la ubicación de los ejes, las escalas seleccionadas son correctas y los trazados de las curvas corresponden a curvas suaves. En términos del marco conceptual de Carlson, Jacobs, Coe, Larson y Hsu (2003) podríamos decir que los estudiantes coordinan la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente, pues en la construcción de la representación gráfica de la función dada los puntos de inflexión y las concavidades son correctamente establecidas; aun cuando esto no se haga de manera espontánea sino como producto de la automatización de otros procedimientos.

Retomamos ahora otra actividad en la que se evidencia la construcción de representaciones de objetos matemáticos: en el taller Función parte entera se presenta el siguiente enunciado:

- i) En Bucaramanga, en un *minutero* de telefonía celular se cobra \$100 por minuto o fracción.
- a) ¿Cuánto cuesta una llamada de 1:01 *min*, 2:99 *min*, 4:00 *min*, 5:36 *min*, 9:5 *min*, 23:485 *min*, 1 h15min32seg?
- b) Halla la función que representa la interdependencia entre el costo de la llamada y el tiempo.

El literal b) de dicha actividad no hace referencia a un tipo de representación específico o a un registro de representación en particular, de manera que los estudiantes podían construir una representación cualquiera que describiera la interdependencia entre las magnitudes allí involucradas.

En la figura siguiente se puede observar la construcción realizada por Jhoan y Sebastián para responder al literal b) propuesto, por un lado se hace la representación en el registro gráfico y por otro se construye una representación algebraica a partir de algunos valores obtenidos mediante reemplazo, en un intento por construir una representación tabular.



Construcción de las representaciones de la interdependencia entre las magnitudes

De nuevo, la representación gráfica posee elementos destacables como la correcta selección y etiquetación de los ejes, la correcta selección de la escala, la selección de la unidad y el trazo. Se puede inferir que durante el desarrollo de las actividades del curso los estudiantes han logrado cierta destreza en la construcción de este tipo de representaciones; si bien en este ítem poseían ya cierta habilidad al inicio del curso como ya se mencionó anteriormente.

Por su parte, en la construcción de la representación algebraica existen algunos errores como la incorrecta escritura para los elementos que definen el dominio de la función por partes y las desigualdades-igualdades mostradas, producto del uso del texto escrito como reproducción fiel del discurso oral. En el caso de la construcción (no terminada) de la representación en el registro tabular se puede observar cómo, a

Handwritten mathematical work showing the construction of a piecewise function and its graph. The top part shows the function definition: $f(x) = \begin{cases} 100x, & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 100([x]+1), & \text{si } x \notin (\mathbb{Z} \cup \mathbb{N}) \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. The bottom part shows a graph of this function on a coordinate plane, with x-axis labeled 'log' and y-axis labeled 'f(x)'. The graph consists of horizontal line segments at $y=0$, $y=100$, $y=200$, etc., for x in $[1, 2)$, $[2, 3)$, $[3, 4)$, etc.

Errores perceptibles en la construcción de la representación algebraica

diferencia de otras actividades donde también se realiza esta construcción, se están utilizando valores tanto enteros como no enteros. Esto último podría considerarse como un cambio de conducta en el desarrollo de este tipo de tareas, lo cual también podría estar influenciado por el literal a) de la misma actividad.

La construcción de representaciones vista como habilidad para nuestros dos casos de estudio presenta tres características fundamentales:

i) El manejo de los objetos paramatemáticos tal como los hemos definido anteriormente en este apartado, ha sido bastante bueno, lo que ha facilitado tanto el desarrollo como la potenciación de esta habilidad. A pesar de que los objetos paramatemáticos no son objeto directo de estudio, en términos de las representaciones se vuelven fundamentales y su correcto o equivocado manejo puede influir de gran forma en esta habilidad.

ii) Producto de la enseñanza recibida en la educación básica y media, se privilegian por parte de los estudiantes las construcciones en ciertos registros de representación, en especial aquellas representaciones que discretizan el comportamiento de las relaciones funcionales establecidas.

iii). La construcción directa de los objetos matemáticos aún presenta errores en términos de lo global, los cuáles serán mejor explicitados a la luz de la siguiente habilidad: la transformación de representaciones de los objetos matemáticos.

CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta que en la presente investigación reconocemos cinco registros de representación, consideramos cinco descriptores para la habilidad de construcción de representaciones de objetos matemáticos; una correspondiente a cada uno de los ya mencionados registros:

- Expresar en lenguaje natural la relación existente entre dos o más magnitudes que covarían.
- Realizar una tabla que presente la relación existente entre dos o más magnitudes que covarían, ya sea una tabulación numérica o simbólica.

- Determinar la expresión algebraica correspondiente a la covariación de dos o más magnitudes
- Realizar una gráfica que dé cuenta de la covariación de dos o más magnitudes, ya sea esta una gráfica en el plano cartesiano, un gráfico estático o una representación digital.
- Utilizar el movimiento de las manos o del cuerpo para modelar el comportamiento de dos o más magnitudes que covarían.

La habilidad de construcción de representaciones podría englobarse dentro de la habilidad de transformación de funciones, una vez que debemos reconocer que cualquier objeto matemático dado su carácter de semiótico solo es accesible mediante una de sus representaciones, de manera que no partimos de la nada. Cualquier construcción que se realice de un objeto matemático tendrá una representación de origen, de manera que estaremos realmente realizando una tarea de transformación, ya sea esta una conversión o un tratamiento.

Existen construcciones “puentes” o intermediarias dentro de las cuales podemos encontrar representaciones mixtas, es decir aquellas con características propias de dos o más registros, sin embargo, al tener dichas características éstas producen por lo general impases didácticos (Duval, 2006)

Desde el curso laboratorio de pre-cálculo se propende por que los estudiantes estén continuamente generando representaciones de los objetos matemáticos involucrados. Dado que las funciones son los objetos matemáticos que por naturaleza modelan las situaciones de cambio y variación, al estudiante se le está sugiriendo continuamente que construya representaciones de las situaciones que le son presentadas.

Aunque en general en las actividades se les sugiere a los estudiantes cuál de los registros de representación utilizar en un determinado momento, no consideramos que esto sea un obstáculo sino por el contrario una muy bien planeada secuencia de manera que el estudiante se vea obligado a abandonar el registro que viene trabajando por costumbre y empiece a realizar construcciones en otros registros.

REFERENCIAS

- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction* (Vol. 59). Harvard University Press.
- Cañedo, C. (2008). Fundamentos teóricos para la implementación de la didáctica en el proceso enseñanza-aprendizaje. Universidad Carlos Rafael Rodríguez. Tesis de doctorado. Cienfuegos
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco de referencia y un estudio. *EMA*, 8 (2), 121-156.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Editorial Aique.
- Cuevas, A. (1996). Sistemas Tutoriales Inteligentes. *Investigaciones en Matemática Educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cuevas, A. y Madrid, H. (2013) Software educativo y el cálculo de raíces reales para el desarrollo de un curso conceptual del cálculo: una historia sin fin. En *La enseñanza del cálculo diferencial e integral* (pp. 1-17). México: Pearson.
- Dávila, G., Flores, R., García, M. y Valencia, M. (2008) *Fundamentos del cálculo*. Sonora: Editorial Garabatos.
- Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa* 7(3), 195-218.
- Dolores, C., & Salgado, G. (2009). Elementos para la graficación covariacional. *Números*, (72), 63-74.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la RSME*, 9(1), pp.143-168
- Fiallo, J. y Parada, S. (2014). Curso de pre-cálculo apoyado en el uso de geogebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Revista Científica*. Universidad Distrital. Colombia.
- Herrera, F. (2001). Habilidades Cognitivas. *Notas del departamento de Psicología Evolutiva y de la educación*. Universidad de Granada. España.
- Hitt, F. (2005). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En J. Cortés, y F. Hitt (Eds.). *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* (pp. 81-107). Morelia: Morevallado Editores.
- Hitt, F. y Dufour, S. (2013) Un análisis sobre la enseñanza del concepto de derivada en el nivel preuniversitario, del rol de un libro de texto y su posible

- conexión con el uso de la tecnología. En *La enseñanza del cálculo diferencial e integral* (pp. 19-42). México: Pearson.
- Laorden, C., García, E., y Sánchez, S. (2005). Integrando descripciones de habilidades cognitivas en los metadatos de los objetos de aprendizaje estandarizados. *Revista de Educación a Distancia*.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas*. Magisterio: Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional (2006) Estándares básicos de competencias en Matemáticas.
- Moreno-Armella, L., & Hegedus, S. (2013). From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. In *The SimCalc vision and contributions* (pp. 27-45). Springer Netherlands.
- Moreno, L. (2014) *Educación Matemática: del signo al pixel*. Universidad Industrial de Santander: Bucaramanga.
- Murillo, J., Arnal, G. y Marcos, P. (2010). Competencias en matemáticas y entornos interactivos. *Contribuciones científicas en honor de Mirian Andrés Gómez*; Universidad de La Rioja, 375-402.
- NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Reed, S.K. (2007). Cognition. *Theory and Applications*. USA: Thomson Wadsworth.
- Rosenbaum, D., Carlson, R., & Gilmore, R. (2000). Acquisition of intellectual and perceptual motor skills. En *Annual Review of Psychology*, 52, 453-470.
- Tall, D. (1996). Functions and calculus. In *International handbook of mathematics education* (pp. 289-325). Springer Netherlands.